(744)

Δευτέρα 3/10/2016

Αριθμητική Επίλυση Σ.Δ.Ε

Βιβλία: 1) Αριθμητικές μέθοδοι για Σ.Δ.Ε, Ακρίβης-Δουγαλής
2) Αριθμητική Ανάλυση Σ.Δ.Ε. Βραχάτη

Σελίδα μαθήματος: users.uoi.gr/mxenos
1) Περιεχόμενο μαθήματος
2) Ασκήσεις προς επίλυση
3) Σημειώσεις του μαθήματος
4) Παλιά θέματα εξετάσεων

Επικοινωνία: γραφείο 313Δ
Εργαστήριο μηχανικής 313Β (χρήση Mathematica, Matlab)
email: mxenos@cc.uoi.gr.

Περιεχόμενο του Μαθήματος

Εισαγωγικά: Διαφορική εξίσωση καλείται μία εξίσωση η οποία περιέχει παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης της εξίσωσης.

1) Πρόβλημα Αρχικών τιμών (Π.Α.Τ)
2) Πρόβλημα Συνοριακών τιμών (Π.Σ.Τ.)
3) Εφαρμογές των Διαφορικών Εξισώσεων: Μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το "φυσικό" πρόβλημα.

Πολλές φορές οι Διαφορικές Εξισώσεις (Δ.Ε.) δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά.

Αριθμητική Ανάλυση

Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Δ.Ε. | Αριθμητική Επίλυση Μερικών Δ.Ε.

1ο Κεφάλαιο: Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση, $a<b\in\mathbb{R}$ κ' $y_0\in\mathbb{R}$.
Τότε ζητάμε λύση της Δ.Ε. μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $y:[a,b]\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$\text{Π.Α.Τ.:}\begin{cases} y'(t)=f(t,y),\ t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με:
1) Ύπαρξη κ' Μοναδικότητα του Π.Α.Τ.
2) Ευστάθεια: συνεχής εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες
3) Συστήματα Σ.Δ.Ε.

2ο Κεφάλαιο: Μέθοδος του Euler

Είναι η απλούστερη μέθοδος, αριθμητική, για την ανάλυση Π.Α.Τ.
Υποθέτουμε ότι το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση, y, θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h=\frac{b-a}{N}$, $N\in\mathbb{N}$.

Οι κόμβοι του διαμερισμού είναι τα σημεία: $t^n=a+nh,\ n=0,1,\dots,N$.

Έτσι ανάγουμε το συνεχές Π.Α.Τ. σε διακριτό, της μορφής:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), \quad n=0,1,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

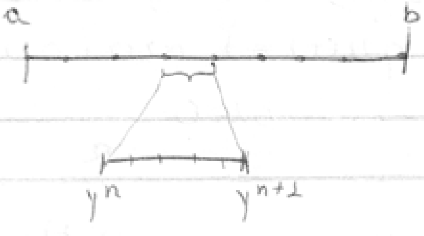
(Διακριτό ανάλογο του Π.Α.Τ. με τη μέθοδο Euler)

Η μέθοδος Euler είναι μονοβηματική.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με:
1) Ακρίβεια κ' ευστάθεια της μεθόδου.
2) Κόστος της μεθόδου Euler
3) Ποιότητα των προσεγγίσεων
4) Γενικεύσεις της Euler.

3ο Κεφάλαιο: Μέθοδοι των Runge-Kutta

Οι Runge-Kutta (R-K) είναι μονοβηματικές μέθοδοι.



$$\begin{array}{c|c} A & t \\ \hline b^T & \end{array} \quad , A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{q,q}, \ t,b \in \mathbb{R}^q$$

1) a_{ij}, t_i, b_i που "δίνουν" καλές μεθόδους R-K.
τάξη ακρίβειας $|\delta^n| = |y^n_{αριθμητική} - y^n_{αναλυτική}|$,
$h=0.1 \ |\delta^n| = (0.1)^4$
2) Κόστος, ποιότητα προσέγγισης
3) Πλεονεκτήματα κ' μειονεκτήματα.

4ο Κεφάλαιο: Πολυβηματικές μέθοδοι

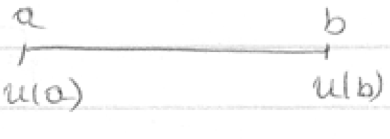
Χρησιμοποιούμε και άλλα χρονικά επίπεδα.

$$\begin{cases} a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = h\left[b_k f^{n+k} + b_{k-1} f^{n+k-1} + \dots + b_0 f^n\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0, 1, 2, \dots, N-k \\ y^0, y^1, \dots, y^k \end{cases}$$

Θα ασχοληθούμε με:
1) Ποιές παράμετροι a_i, b_i δίνουν "καλές" πολυβηματικές μεθόδους.
2) Κόστος κ' ποιότητα της μεθόδου
3) Πλεονεκτήματα κ' μειονεκτήματα.
4) Πόσο χρησιμοποιούνται;

5ο Κεφάλαιο: Έστω $q, f: [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχείς συναρτήσεις. Ζητούνται συναρτήσεις $u: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμες τέτοιες ώστε

Π.Σ.Τ.: $\begin{cases} -u''(t) + q u(t) = f, \text{ στο } [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$



Θα ασχοληθούμε με:
1) Ύπαρξη κ' Μοναδικότητα
2) Ο ρόλος που παίζει το πρόσημο της q.

(744)

Δευτέρα 10/10/2016

Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση κ' $y_0 \in \mathbb{R}$. Το πρόβλημα αρχικών τιμών: ζητείται συνάρτηση $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί την (1).

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Έστω f συνεχής συνάρτηση για $(t,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ ή $f \in C^0([a,b] \times \mathbb{R})$.

Κάθε συνάρτηση $y \in C^1([a,b])$ η οποία ικανοποιεί τόσο τη διαφορική εξίσωση του (1) όσο και την αρχική συνθήκη (1), ονομάζεται λύση του Π.Α.Τ

Ύπαρξη και Μοναδικότητα (της λύσης του Π.Α.Τ)

Σημείωση: Υπάρχει λύση η οποία είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα. (well-posed).

Στην περίπτωση που η f είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού ως προς y, η Σ.Δ.Ε. λέγεται γραμμική κ' το (1) γράφεται ως: (2)

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)y(t) + q(t), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Αν $p, q \in C[a,b]$, τότε έχει ακριβώς μία λύση που είναι η:

$$\boxed{y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds}\left[y_0 + \int_a^t q(s)\, e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds\right],}$$

$t \in [a,b]$. (3)

Παρατήρηση: Για γενική συνάρτηση f τα πράγματα είναι διαφορετικά. Γενικά, όχι μόνο δεν μπορούμε να δώσουμε λύση σε κλειστή μορφή, αλλά ούτε και να εγγυηθούμε την ύπαρξη ή τη μοναδικότητα της λύσης.

Παράδειγμα 1: (4): $\begin{cases} y'(t) = y^2(t), & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Λύση

Πρόκειται για μη γραμμική Σ.Δ.Ε.

Η y' είναι πάντα μη αρνητική (στο $[0,2]$) άρα η y είναι αύξουσα συνάρτηση κ' λαμβάνει μη μηδενικές τιμές αφού η αρχική συνθήκη είναι $y(0)=1$ (δηλ. $t \geq 0$ κ' y αύξουσα $\Rightarrow y(0) \leq y(t) \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 \leq y(t), \ \forall t \in [0,2]$)

Γράφουμε τη Δ.Ε. στη μορφή: $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}\right) = 1$

Ολοκληρώνοντας από το 0 έως το t έχουμε ισοδύναμα: $-\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(\tau)}\right) d\tau = \int_0^t d\tau \Leftrightarrow$

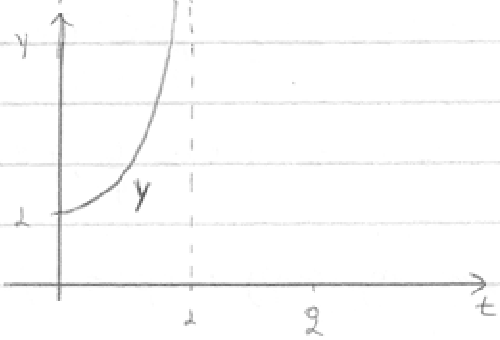
$\Leftrightarrow -\left[\frac{1}{y(\tau)}\right]_0^t = t \Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y(0)} - t}$

$\xLeftrightarrow{y(0)=1} y(t) = \frac{1}{1-t}$

Άρα, $y(t) = \frac{1}{1-t}$, $t \in [0,2]$, η λύση του Π.Α.Τ.

(7 44)

Παρατηρώ ότι για $t \to 1^-$, $y \to +\infty$, άρα δεν υπάρχει λύση σε όλο το $[0,2]$, δηλ.



<u>Παράδειγμα 2:</u> (5) : $\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

<u>Λύση</u>

Πρόκειται για μη γραμμική Σ.Δ.Ε.

α) Παρατηρώ ότι $y(0)=0$, άρα η $y(t)=0$, $t \in [0,1]$, δηλ. η μηδενική, είναι λύση της Δ.Ε. (τετριμμένη λύση).

β) (Υπάρχει άλλη λύση εκτός της μηδενικής;)

Η Δ.Ε. γράφεται στη μορφή $\frac{y'}{\sqrt{|y|}} = 1$ (*),

αφού $y(t)>0$, $\forall t \in [0,1]$ η (*) γίνεται:

$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1 \Leftrightarrow y' y^{-1/2} = 1 \Leftrightarrow 2(y^{1/2})' = 1 \Leftrightarrow 2(\sqrt{y})' = 1$, $t \in [0,1]$

Ολοκληρώνοντας από t^*: σταθ. έως t έχουμε:

$2\int_{t^*}^{t} (\sqrt{y(s)})' ds = \int_{t^*}^{t} ds \Leftrightarrow 2\left[\sqrt{y(t)} - \sqrt{y(t^*)}\right] = t - t^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{y(t)} = t - t^* + 2\sqrt{y(t^*)} \Leftrightarrow \left(y(t) = \frac{t-t^*}{2} + \sqrt{y(t^*)} \right)^2$,

η λύση του Π.Α.Τ. (5), $t^* < t \leq 1$ κ' $y \in C^1[0,1]$.

Αν $t^* = 0$, τότε $y(t^*) = y(0) = 0$, άρα $y(t) = \frac{t}{4}$, $t \in [0,1]$

Η πολλαπλότητα των λύσεων δημιουργεί πρόβλημα στην μοναδικότητα.

<u>Σημείωση</u>: 1) Λύσεις προβλημάτων που δεν λύνονται μονοσήμαντα είναι <u>πολύ δύσκολο</u> να προσεγγιστούν αριθμητικά.
2) Στην περίπτωση προβλημάτων με μία ακριβώς λύση τα πράγματα είναι απλούστερα.

<u>Θεώρημα</u> (Ύπαρξη κ' Μοναδικότητα λύσεων για Σ.Δ.Ε)
Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση η οποία πληροί επίσης τη συνθήκη του <u>Lipschitz</u> ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλ.
(σ) $\exists\, L > 0, \forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}: |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$
τότε $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ (αρχική συνθήκη Α.Σ.) το Π.Α.Τ. (1) λύνεται μονοσήμαντα (δηλ. έχει μοναδική λύση).

<u>Παρατήρηση</u>: Η συνθήκη του Lipschitz είναι πολύ περιοριστική.

<u>Σημείωση</u>: Αν η f είναι παραγωγίσιμη ως προς τη δεύτερη μεταβλητή y κ' ισχύει ότι $\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall t \in [a,b], \forall y \in \mathbb{R}: |f_y(t,y)| \leq M$ (δηλ. η f_y: παράγωγος της f ως προς y, είναι φραγμένη) τότε η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz (π.χ. $L = M$), διαπιστώνουμε

"εύκολα" με τη βοήθεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής ότι: $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $f(t,y_1)-f(t,y_2)=f_y(t,\tilde{y})\,(y_1-y_2)$ όπου $\tilde{y} \in (y_1,y_2)$.

Άρα, έχουμε: $|f(t,y_1)-f(t,y_2)| = |f_y(t,\tilde{y})|\,|y_1-y_2|$
$\leq M\,|y_1-y_2|$

Επομένως, η f πληροί τη συνθήκη Lipschitz, αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση που η f είναι της μορφής:
1) $f(t,y)=p(t)y(t)+q(t)$: γραμμική πολυωνυμική
2) $f(t,y)=p(t)\sin y$.

<u>Παράδειγμα</u>: Η $f(t,y)=y^2$, δεν ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, αφού $f_y(t,y)=2y(t)$ και για $y\to\pm\infty$ έχουμε ότι $|f_y(t,y)|\to\infty$, δηλ. δεν είναι φραγμένη.

<u>Παρατήρηση</u>: Η συνθήκη Lipschitz λέγεται ολική συνθήκη, γιατί ισχύει $\forall\, y_1,y_2 \in \mathbb{R}$ και αν ισχύει έχουμε ύπαρξη (λόγω της συνέχειας) και μοναδικότητα (συνθήκη Lipschitz) λύσης σε όλο το διάστημα $[a,b]$.

<u>Θεώρημα</u> (Τοπική Ύπαρξη & Μοναδικότητα λύσεων για Σ.Δ.Ε)
Έστω $c>0$ & $f\in C([a,b]\times[y_0-c,\,y_0+c])$. Αν η f πληροί στο $[a,b]\times[y_0-c,\,y_0+c]$ τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλ. $\exists\, L\geq 0$, $\forall t\in[a,b]$, $\forall\, y_1,y_2\in[y_0-c,\,y_0+c]$:
$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L\,|y_1-y_2|$ (7)

τότε το Π.Α.Τ.(1) λύνεται μονοσήμαντα, τουλάχιστον στο διάστημα $[a,b']$, με $b' = \min\{b, a + \frac{c}{A}\}$, $A = \max|f(t,y)|$, $a \le t \le b$ και $y_0 - c \le y \le y_0 + c$

<u>Παρατηρήσεις</u>: α) Η (7) είναι πολύ ασθενέστερη από την (6). Κάθε συνάρτηση $f \in C([a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c])$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς y στο $[y_0 - c, y_0 + c]$ πληροί την (7).
β) Η συνέχεια της f εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης του Π.Α.Τ.(1) σε κάποιο διάστημα της μορφής $[a,c]$, $c > a$. Δεν εξασφαλίζει όμως γενικά την μοναδικότητα.

Για παράδειγμα: αν $f(x) = \sqrt{|x|}$, για το Π.Α.Τ.: $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Δεν ισχύει η τοπική συνθήκη Lipschitz ως προς y σε κανένα διάστημα που περιέχει το 0, αφού $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{1}{2\sqrt{|y|}} \to \infty$, για $y \to 0$, δηλ. δεν είναι φραγμένη. Επιπλέον, η f_y δεν είναι συνεχής για οποιοδήποτε διάστημα περιέχει το 0.

Ευστάθεια λύσης του Π.Α.Τ
(Συνεχής εξάρτηση από τις Α.Σ. του προβλήματος)

Για δοσμένες αρχικές συνθήκες, $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, θεωρούμε το Π.Α.Τ.(8):

Π.Α.Τ(8): $\begin{cases} y'(t)=f(t,y), & t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$ ς'

$\begin{cases} z'=f(t,z), & t\in[a,b] \\ z(a)=z_0. \end{cases}$

<u>1η Περίπτωση</u>: Έστω ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz. Τα Π.Α.Τ. έχουν μοναδικές λύσεις $y,z\in C^1[a,b]$, αντίστοιχα. Θέτουμε: $\varepsilon(t)=y(t)-z(t)$ ς' θέλουμε να εκτιμήσουμε την $|\varepsilon(t)|$ συναρτήσει του $|\varepsilon(a)|=|y_0-z_0|$.

Για να οδηγηθούμε σε εκτίμηση της $|\varepsilon(t)|$ ή ισοδύναμα $\varepsilon^2(t)$ χρειαζόμαστε πληροφορία για την παράγωγό της. Έχουμε:

$\varepsilon'(t)=y'(t)-z'(t)\overset{(8)}{=}f(t,y)-f(t,z), \quad t\in[a,b]$

Πολλαπλασιάζοντας με την $\varepsilon(t)$ έχουμε:

$\varepsilon(t)\varepsilon'(t)=\big(f(t,y)-f(t,z)\big)\varepsilon(t).$

Χρησιμοποιώντας την ολική συνθήκη Lipschitz προκύπτει:

$\varepsilon(t)\varepsilon'(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon^2(t)\right)\le|f(t,y)-f(t,z)||\varepsilon(t)|\le L\varepsilon^2(t),$
$t\in[a,b]$

Θέτω $\varepsilon^2(t)=\varphi(t)$ και έχουμε:

$\frac{1}{2}\varphi'(t)\le L\varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t)-2L\varphi(t)\le 0, \quad t\in[a,b] \quad (9)$

Για να λύσω την (9) πολ/ζω με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-2Lt}:

$\varphi'(t)e^{-2Lt} - 2Le^{-2Lt}\varphi(t) \leq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\varphi(t)e^{-2Lt}\right) \leq 0,\ t\in[a,b]$

Άρα, η $e^{-2L}\varphi(t)$ είναι φθίνουσα στο $[a,b]$, δηλ.
$\varphi(t)e^{-2tL} \leq \varphi(a)e^{-2La}$, $t\in[a,b]$

Μπορούμε να γράψουμε: $\max\limits_{a\leq t\leq b}|y(t)-z(t)| \leq e^{L(b-a)}|y_0-z_0|$ (10)

ή $\max\limits_{a\leq t\leq b}|y(t)-z(t)| \leq C|y_0-z_0|$, όπου $C=e^{L(b-a)}$

η C είναι μία σταθερά που αυξάνει θετικά με τη σταθερά Lipschitz.

<u>Συμπέρασμα</u>: Η (10) εκφράζει τη συνεχή εξάρτηση των λύσεων y, του Π.Α.Τ. (1) στη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ από τα αρχικά δεδομένα $y_0\in\mathbb{R}$, $\|y\|_\infty = \max\limits_{a\leq t\leq b}|y(t)|$ (11).

Δευτέρα 24/10/2016

<u>Επανάληψη</u>:

<u>Πρόβλημα Αρχικών Τιμών</u>

Ζητάω λύση $y:[a,b]\to\mathbb{R}$

Π.Α.Τ (1): $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)),\ t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Αν $f\in C([a,b]\times\mathbb{R})$ τότε κάθε συνάρτηση $y\in C^1([a,b])$ ικανοποιεί το Π.Α.Τ. ονομάζεται λύση.

(744)

Ολική Ύπαρξη κ' Μοναδικότητα

Θεώρημα 1: Αν $f \in C([a,b]\times\mathbb{R})$ κ' πληροί τη συνθήκη του Lipschitz, δηλ. $\exists L \geq 0, \forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}: |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$.
Τότε $\forall y \in \mathbb{R}$, το Π.Α.Τ.(1) έχει μοναδική λύση.

Τοπική Ύπαρξη κ' Μοναδικότητα

Θεώρημα 2: Έστω $c>0$ κ' $f \in C([a,b]\times[y_0-c, y_0+c])$ κ' η f πληροί στο $[a,b]\times[y_0-c, y_0+c]$ τη συνθήκη Lipschitz, δηλ. $\exists L \geq 0, \forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in [y_0-c, y_0+c]: |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$.

Τότε το Π.Α.Τ.(1) λύνεται μονοσήμαντα τουλάχιστον στο διάστημα $[a,b']$, όπου $b' = \min\left(b, a + \frac{c}{A}\right)$, $A = \max\limits_{\substack{t \in [a,b] \\ y \in [y_0-c, y_0+c]}} |f(t,y)|$

Ευστάθεια λύσης του Π.Α.Τ.(1)

Για δοσμένες αρχικές τιμές $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τα Π.Α.Τ:

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \ t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \text{κ'} \quad \begin{cases} z' = f(t,z), \ t \in [a,b] \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Αποτέλεσμα: Αν η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη Lipschitz, τότε:

$$\|y(t) - z(t)\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |y(t) - z(t)| \leq e^{L(b-a)} |y_0 - z_0| \quad (10).$$

Παρατήρηση: Στο δεξί μέλος της (10) εμφανίζεται μία σταθερά, $c = e^{L(b-a)}$, που αυξάνεται εκθετικά με τη σταθερά Lipschitz. Όταν αυτή η σταθερά, είναι πολύ μεγάλη, τότε η εκτίμηση δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

<u>2η Περίπτωση</u>: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη:
$\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $\big(f(t,y_1)-f(t,y_2)\big)(y_1-y_2) \leq 0$ (12)
Η συνθήκη αυτή ονομάζεται "μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz"

<u>Παρατήρηση</u>: Το κίνητρο για αυτήν τη συνθήκη προέρχεται από τις εφαρμογές και για να μπορέσουμε να τη γενικεύσουμε για την περίπτωση συστημάτων Σ.Δ.Ε.

<u>Πρόταση</u>: Στη βαθμωτή περίπτωση, η (12) σημαίνει ότι η f είναι φθίνουσα συνάρτηση της 2ης μεταβλητής (y) για κάθε τιμή της 1ης μεταβλητής (t).

<u>Απόδειξη</u>:
$\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$ ς' $\varepsilon'(t) = f(t,y) - f(t,z)$
Έστω ότι ισχύει η μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz, δηλ. $\big(f(t,y)-f(t,z)\big)(y-z) \leq 0$

Πολλαπλασιάζοντας με το $\varepsilon(t)$ έχουμε:
$\varepsilon(t)\,\varepsilon'(t) = \varepsilon(t)\big(f(t,y)-f(t,z)\big) = \big(f(t,y)-f(t,z)\big)\big(y(t)-z(t)\big) \leq 0$

$\varepsilon(t)\,\varepsilon'(t) = \frac{1}{2}\big(\varepsilon^2(t)\big)' \leq 0$, $\forall t \in [a,b]$

Συνεπώς, η $\varepsilon^2(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t όμοια και η $|\varepsilon(t)|$, οπότε:

$$\max_{t\in[a,b]} |y(t)-z(t)| \leq |y(a)-z(a)| \quad (13).$$

Παρατηρήσεις:

1) Στην (13) δεν υπεισέρχεται η σταθερά Lipschitz
2) Από την (13) έπεται η μοναδικότητα της λύσης του Π.Α.Τ.
3) Η ύπαρξη λύσης εξασφαλίζεται από την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b]\times\mathbb{R}$, (δηλ. $f\in C([a,b]\times\mathbb{R})$). Όντως, η τοπική ύπαρξη της λύσης σε ένα διάστημα $[a,b')$ εξασφαλίζεται από τη συνέχεια της f.

Για ολική ύπαρξη στο διάστημα $[a,b]$, θα χρησιμοποιήσουμε την (12) (μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz) για ν.δ.ο οι λύσεις y, αν υπάρχουν, είναι φραγμένες στο $[a,b]$.

$$\text{Π.Α.Τ.: } \begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)), & t\in[a,b] \\ y(a)=y_0, & y_0\in\mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

Έχουμε το Π.Α.Τ (1) κ' θέλουμε ν.δ.ο. η $y(t)$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$.

Προσθαφαιρώντας το $f(t,y_0)$, έχουμε:

$$y'(t)=[f(t,y(t))-f(t,y_0)]+f(t,y_0)$$

Πολλαπλασιάζω με $y(t)$:

$$y'(t)\,y(t)=[f(t,y(t))-f(t,y_0)]\,y(t)+f(t,y_0)\,y(t)$$

Ισχύει: $2y'(t)\,y(t)=[y^2(t)]'$, άρα

$[y^2(t)]' = 2[f(t,y) - f(t,y_0)]\, y(t) + 2f(t,y_0)\, y(t)$

Αν θεωρήσω $y_0 = 0$ έχουμε:

$[y^2(t)]' = 2[f(t,y) - f(t,0)]\, y(t) + 2f(t,0)\, y(t)$

όπου $[f(t,y) - f(t,0)]$: μη θετικός όρος, διότι η f είναι φθίνουσα συνάρτηση της y.

$2f(t,0)\, y(t) \leq (f(t,0))^2 + (y(t))^2$, λόγω της: $2xy \leq x^2 + y^2$

Άρα, έχουμε: $[y^2(t)]' \leq [f(t,0)]^2 + [y(t)]^2$

οπότε: $[y^2(t)]' - y^2(t) \leq [f(t,0)]^2, \ \forall t \in [a,b]$

Πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-t}:

$$e^{-t}[y^2(t)]' - e^{-t} y^2(t) \leq e^{-t}[f(t,0)]^2$$
$$\Rightarrow [e^{-t} y^2(t)]' \leq e^{-t} f^2(t,y_0)$$

Ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[a,t]$:

$$e^{-t}(y(t))^2 - e^{-a}(y(a))^2 \leq \int_a^t e^{-s} f^2(s,y_0)\, ds, \ t \in [a,b]$$

Για $t = b$, καταλήγουμε:

$$(y(t))^2 \leq e^b\Big[(y_0)^2 e^{-a} + \int_a^b e^{-s}(f(s,0))^2 ds, \ t \in [a,b] \quad (*)$$

Συμπέρασμα: Από την $(*)$ συμπεραίνουμε ότι η y είναι όντως φραγμένη στο $[a,b]$ ζ' άρα η y αποτελεί ολική λύση.

($\pi.\chi.$ $y' = y^2$ στο $[0,2]$)

<u>Γραμμική περίπτωση (προβλήματα δοκιμής)</u>

Αν η f είναι γραμμική ως προς το y, δηλ. $f(t,y)=\lambda(t)y(t)+\mu(t)$, τότε η f ικανοποιεί τη (12) (μονόπλευρη Lipschitz) αν-ν η συνάρτηση $\lambda(t)$ λαμβάνει μη θετικές τιμές ($\lambda(t)\leq 0,\ t\in[a,b]$).

Έχουμε: Π.Α.Τ. (2) $\begin{cases} y'(t)=\lambda(t)y(t)+\mu(t),\ t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

Όταν μιλάμε για ευστάθεια αναφερόμαστε πάντα στη διαφορά δύο λύσεων, στην γραμμική περίπτωση αρκεί να μελετήσουμε μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης, αφού η διαφορά δύο λύσεων ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση. Δηλαδή η $\mu(t)$ δεν παίζει κανένα ρόλο στην ευστάθεια, οπότε αρκεί να μελετήσουμε το:

Π.Α.Τ. (14) $\begin{cases} y'(t)=\lambda(t)y(t),\ t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

<u>Γενικά:</u> $y'(t)-\lambda(t)y(t)=0 \rightarrow$ ομογενής Δ.Ε.
$y'(t)-\lambda(t)y(t)=\mu(t) \rightarrow$ μη ομογενής Δ.Ε.

Τότε η εκτίμηση ευστάθειας γράφεται ως:

(15) $\max_{t\in[a,b]}|y(t)|\leq|y(a)|$

υπό την προϋπόθεση ότι η $\lambda(t)$ λαμβάνει μη θετικές τιμές.

Για το Π.Α.Τ. (14), χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε μία μη μηδενική αρχική τιμή, διότι αν y: λύση για $y_0=1$, τότε η λύση για οποιαδήποτε αρχική τιμή είναι το γινόμενο $y_0 y$.

Και ειδικότερα θα μας απασχολήσει η περίπτωση που το $\lambda(t)$ είναι σταθερό. Έτσι, το πρόβλημα δοκιμής γίνεται:

Π.Α.Τ: (16) $\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t\in[0,b] \\ y(0)=1 \end{cases}$

και η λύση είναι $y(t)=e^{\lambda t}$ (η περίπτωση όπου η σταθερά λ είναι μη θετική, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον).

Συστήματα Σ.Δ.Ε.

(Γενίκευση προηγούμενων για συστήματα Σ.Δ.Ε. 1ης τάξης)

Έστω $m\in\mathbb{N}$, $\bar{f}:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $\bar{y}_0\in\mathbb{R}^m$

Ζητείται συνάρτηση $\bar{y}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, τέτοια ώστε: (17): $\begin{cases} \bar{y}'(t) = \bar{f}(t,\bar{y}(t)), & t\in[a,b] \\ \bar{y}(a)=\bar{y}_0 \end{cases}$

Π.χ. για το Π.Α.Τ: $\begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) \\ z'(t) = b(t)\,z(t), & t\in[a,b] \\ y(a)=y_0,\ z(a)=z_0 \end{cases}$

η λύση του είναι της μορφής: $\bar{y}_1=(y,z)$.

<u>Παρατήρηση</u>: Τα αποτελέσματα που έχουμε αναφέρει, για πραγματική βαθμωτή λύση, ισχύουν και για το (17), αν αντικαταστήσουμε

744

την απόλυτη τιμή με μια οποιαδήποτε νόρμα, $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$.

Γνωστές νόρμες:

1) max norm (ή νόρμα απείρου): $\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\}$

2) Ευκλείδια νόρμα (Eucledia norm): $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2}$

3) p-νόρμα: $\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$

Θεώρημα (Ύπαρξης κ' Μοναδικότητας για Σ.Δ.Ε):
Έστω $f:[a,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, συνεχής η οποία πληροί τη συνθήκη Lipschitz:
(18) $\exists\, L \geq 0 : \forall t \in [a,b],\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m : \|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$
(ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$).
Τότε, για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}^m$, το Π.Α.Τ. (17) έχει μοναδική λύση.

Παρατήρηση: Η συνθήκη (18) είναι πολύ περιοριστική.

Για παράδειγμα: αν $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη για $(t,y) \in [a,b]\times\mathbb{R}^m$ κ' ισχύει ότι: $M = \sup_{\substack{1\leq i\leq n \\ (t,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^m}} \sum_{j=1}^{m} \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| < \infty$, τότε

η f πληροί την (18).

Προβλήματα αρχικών τιμών Σ.Δ.Ε. ανώτερης τάξης μπορούν να αναχθούν σε Π.Α.Τ της μορφής (17).

Π.Α.Τ. (19)
$$\begin{cases} y^{(m)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)\right), & t \in [a,b] \\ y^{(i)}(a) = y_i, & i = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

Θέτουμε: $\bar{z}(t) = \left(y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)\right)^T, t \in [a,b]$

$\bar{z}_0 = \left(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}\right)^T$

Τότε το Π.Α.Τ. (19) γράφεται ως:

(20):
$$\begin{cases} \bar{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix}, & t \in [a,b] \\ \bar{z}(a) = \bar{z}_0 \end{cases}$$

Π.χ.:
$$\begin{cases} y''(t) + p\,y(t) = q, & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1 \end{cases}$$

Θέτουμε $z(t) = y'(t)$ κ' έχουμε:
$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ (y')' = z'(t) = -p\,y(t) + q, & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0, \quad z(a) = y_1. \end{cases}$$

Ευστάθεια για συστήματα Σ.Δ.Ε.

η απόδειξη έχει πέσει ως θέμα εξετάσεων

Η f ικανοποιεί την μονόπλευρη Lipschitz κ' περιορίζεται στην Ευκλείδεια νόρμα, τότε λέμε η $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί την μονόπλευρη L ως προς την y, αν $\forall t \in [a,b]$,

(21) $\forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $\left(f(t,y) - f(t,\tilde{y}), (x - \tilde{y})\right) \le 0$, με $(\cdot,\cdot)$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$. Τότε ισχύει ότι $\|y(t) - z(t)\| \le \|y_0 - z_0\|$, με $\|\cdot\|$ την Ευκλείδεια νόρμα.

·744

Δευτέρα 31/10/2016

Επανάληψη:

Συστήματα Σ.Δ.Ε. (1ης τάξης)

Έστω $m \in \mathbb{N}$, $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$

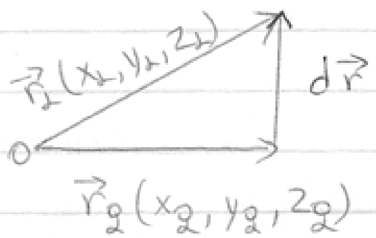
Ζητάμε συνάρτηση $\bar{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, τέτοια ώστε:

$$\text{Π.Α.Τ. } (17): \begin{cases} \bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t)), & t \in [a,b] \\ \bar{y}(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

(Αντί για $|\cdot|$ έχω $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$)

Θεώρημα (Ύπαρξης κ' Μοναδικότητας για συστήματα Σ.Δ.Ε): Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και πληροί τη συνθήκη Lipschitz ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$, $\exists\, L \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [a,b]$, $\forall \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^m$:
$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$ (18).
Τότε για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}^m$, το Π.Α.Τ. (17) έχει μοναδική λύση.

π.χ. στον $\mathbb{R}^3$



$$d\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Αν δουλεύω με τη νόρμα απείρου τότε:

$$\|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\|_\infty = \max\{(x_2-x_1), (y_2-y_1), (z_2-z_1)\}$$

Ευστάθεια για συστήματα Σ.Δ.Ε.

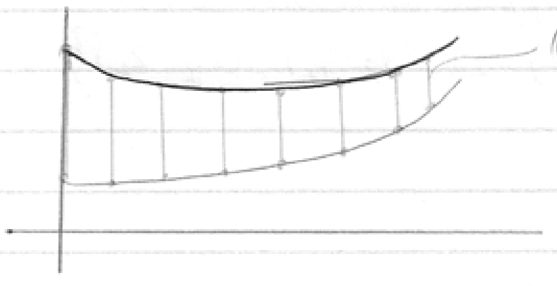
* *Καλά ορισμένο (well posed)*
1) Υπάρχει λύση
2) Είναι μοναδική
3) Συνεχής εξάρτηση από "αρχικές" συνθήκες (διότι μπορεί να είναι συνοριακές συνθήκες) (βοηθητικές συνθήκες) *

Η f ικανοποιεί την μονόπλευρη Lipschitz κ' περιοριζόμαστε στην περίπτωση της Ευκλείδειας νόρμας. Τότε μια συνάρτηση $f:[a,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την μονόπλευρη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή y, αν: $\forall t\in[a,b]$, $\forall\, y,z\in\mathbb{R}^m$ $(f(t,y)-f(t,z),\, y-z)\leq 0$ (2.1), με $(\cdot,\cdot)$ το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$.

Παρατήρηση: $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$: διανυσματικός χώρος. Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να μου δώσει μια μετρική (νόρμα).

Τότε ισχύει ότι: $\|y(t)-z(t)\|\leq\|y_0-z_0\|$, $t\in[a,b]$ με $\|.\|$ την Ευκλείδεια νόρμα.

Η παραπάνω σχέση αποτελεί πολύ ισχυρή συνθήκη.



Οι διαφορές ελαττώνονται άρα η συνάρτηση είναι φθίνουσα.

(7-44)

<u>Στην περίπτωση γραμμικών συστημάτων</u>

$$(22): \begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + g(t), \ t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Ικανοποιείται η (21) αν-ν ο πίνακας $A(t)$, $t \in [a,b]$, είναι μη θετικά ορισμένος, δηλ. $\forall t \in [a,b], \forall x \in \mathbb{R}^m : (Ax, x) \le 0$ (23) που είναι η αντίστοιχη συνθήκη μη θετικότητας της συνάρτησης $\lambda(t)$ (πρόβλημα δοκιμής) της βαθμωτής περίπτωσης.

<u>Πρόβλημα δοκιμής</u>: $\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)y(t), \ t \in [a,b], \ \lambda(t): \text{μη θετική} \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η γραμμική εξίσωση $y' = \lambda y$ με μιγαδικό συντελεστή: $\lambda = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Μπορούμε να γράψουμε ως εξής το σύστημα:

$$y' = \lambda y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ικανοποιεί τη σχέση $(Ax, x) = a\|x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. Γι' αυτό το σύστημα ικανοποιεί τη συνθήκη ευστάθειας (21) αν-ν το a είναι μη θετικό $(a \le 0)$.

Άσκηση 1: Έστω $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Ν.δ.ο. κάθε λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης: $y'(t)=p(t)y(t)$, $t\in[a,b]$ είναι της μορφής: $y(t)=ce^{\int_a^t p(s)ds}$, c: σταθ.

Λύση

1) Κάθε συνάρτηση της μορφής $y(t)=ce^{\int_a^t p(s)ds}$ είναι λύση της ομογενούς δ.ε. $y'=p(t)y$, c: σταθ.

Πράγματι: $\left(ce^{\int_a^t p(s)ds}\right)'=ce^{\int_a^t p(s)ds}\left(\int_a^t p(s)ds\right)'=$

$$=ce^{\int_a^t p(s)ds}\,p(t)=p(t)\,y(t).$$

2) Δεν υπάρχουν λύσεις y, της $y'=p(t)y$ μορφής διαφορετικής της $y(t)=ce^{\int_a^t p(s)ds}$.

Έστω y μια λύση της Δ.Ε.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(t)=y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}$, τότε δ.δ.ο $u(t)=c$, οπότε η $y(t)=ce^{\int_a^t p(s)ds}$.

Πράγματι: $u'(t)=\left[y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}\right]'=$

$$=y'(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}-y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}\left(-\int_a^t p(s)ds\right)'=$$

$$=y'(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}-y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}\,p(t)=$$

$$=e^{-\int_a^t p(s)ds}\left[y'(t)-y(t)p(t)\right]=0$$

Άρα, η $u(t)=c$, c: σταθερά.

744

(Η άσκηση 2 του κεφαλαίου 1 που είναι αναρτημένη στην ιστοσελίδα λύνεται όμοια).

Άσκηση 2: Θεωρούμε το Π.Α.Τ: $\begin{cases} y' = y^2, & t \in [0,2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Ελέγξτε ότι το θεώρημα ύπαρξης κ' μοναδικότητας λύσεων για Σ.Δ.Ε. εξασφαλίζει ύπαρξη κ' μοναδικότητα της λύσης του Π.Α.Τ. τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $[0, b']$ κ' επειδή η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y σ'οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[1-c, 1+c]$, μελετήστε (εκτιμήστε) το b' ως συνάρτηση του c.

Λύση

$f(t,y) = y^2(t), \quad t \in [0,2]$

$f_y(t,y) = 2y$ για $y \to \pm\infty$, $|f_y| \to \infty$ για $t \in [0,2]$

Άρα, δεν ικανοποιείται η ολική συνθήκη Lipschitz (αφού η f δεν είναι φραγμένη), ικανοποιείται όμως η τοπική συνθήκη Lipschitz στο $[1-c, 1+c]$. Επίσης η f τοπικά είναι συνεχής. Συνεπώς, το πρόβλημα έχει τοπικά σ' ένα διάστημα $[0, b']$ μοναδική λύση.

Για ποιά λοιπόν επιλογή του c δίνει το θεώρημα ύπαρξης κ' μοναδικότητας το μέγιστο

$b' = \min\left(2, 0 + \frac{c}{A}\right)$

$$A = \max_{\substack{t \in [0,2] \\ 1-c \le y \le 1+c}} |f(t,y)| = \max |y^2| = (1+c)^2$$

Άρα, $b' = \min\left(2, \frac{c}{(1+c)^2}\right)$

Εξετάζω αν $\frac{c}{1+c^2} \le 2$, αν όντως ισχύει

τότε $b' = \frac{c}{(1+c)^2}$ αλλιώς $b' = 2$

$\frac{c}{1+c^2} \le 2 \Rightarrow 2c^2 + 3c + 2 > 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 16 = -7 < 0$

Άρα, η ανίσωση ισχύει $\forall c \in \mathbb{R}$ κ' συνεπώς
$b' = \frac{c}{(1+c)^2}$

Θέτω $g(c) = \frac{c}{(c+1)^2}$, κ' ζητώ το μέγιστο αυτής.

Παραγωγίζω την g ως προς c κ' έχω:

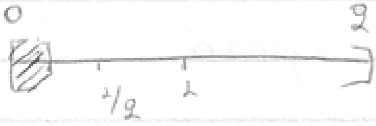
$$g'(c) = \left[\frac{c}{(c+1)^2}\right]' = \frac{1-c}{(1+c)^3} \quad , \; 1+c>0$$

$1 - c = 0 \Rightarrow c = 1$ σημείο μεγίστου:

	0		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Συνεπώς, $\max\limits_{c>0} \frac{c}{(c+1)^2} = \frac{1}{4}$

<u>Σχηματικά</u> (περιορίζομαι στο $[0, \frac{1}{4}]$)



744

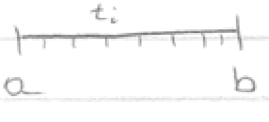
Εξισώσεις Διαφορών

Το πρόβλημα επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ανάλογο με το πρόβλημα επίλυσης μιας εξίσωσης διαφορών. Η τυπική διαφορά μεταξύ διαφορικών εξισώσεων ς' εξισώσεων διαφορών είναι ότι οι άγνωστες ποσότητες των εξισώσεων διαφορών είναι ακολουθίες σημείων και όχι συναρτήσεις.

Σ.Δ.Ε: Ordinary Differential Equation (O.D.E)

Ορισμός: Εξίσωση Διαφορών (Ε.Δ. - Difference Equations) ονομάζεται μία εξίσωση που περιέχει διαφορές ς' αποτελεί μία σχέση των τιμών y_i μιας συνάρτησης $(y(t))$ ορισμένης για διακεκριμένες τιμές (t_i) του ορίσματος

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



Π.χ: $y_{i+1} - y_{i-1} + y_i = 0$, είναι μία Ε.Δ.

Ορισμός: Λύση μιας Ε.Δ. είναι μία ακολουθία τιμών y_i που πληρούν την Ε.Δ. για ένα σύνολο διακεκριμένων τιμών i.

Ορισμός: Τάξη μιας Δ.Ε. είναι η διαφορά μεταξύ των μεγαλύτερων και μικρότερων δεικτών (τιμών του i) της εξίσωσης.

<u>Ομογενής (γραμ.) Ε.Δ. n-τάξης με σταθερούς συντελεστές</u>

$y_{i+1} + a_{n-1} y_{i+(n-1)} + \dots + a_0 y_i = 0$, Ε.Δ. n-τάξης

ζητάμε λύση της μορφής $y_i = 6^i, \forall i$.

(Όπως στη συνεχή περίπτωση $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$
ζητάμε λύση της μορφής: $y = e^{6t}$)

Παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση
$p(6) = 6^n + a_{n-1} 6^{n-1} + \dots + a_0 = 0$
πολυώνυμο n βαθμού.

Βρίσκω τη γενική λύση της ομογενούς

<u>Εφαρμογή</u>: Έστω η Ε.Δ.: $2y_{i+3} - y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = 0$,
με αρχικές τιμές: $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.
Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης σε κλασική μορφή για όλες τις διαδοχικές τιμές του i.

(744)

2ο Κεφάλαιο: Μέθοδος Euler

Η μέθοδος Euler είναι η απλούστερη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών Σ.Δ.Ε. (η απλότητά της καθιστά εύκολη την κατανόηση εννοιών κ' φαινομένων για πιο πολύπλοκες μεθόδους. Δεν χρησιμοποιείται συχνά, διότι δεν έχει ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον).

Υποθέτουμε ότι το Π.Α.Τ.(1) $\begin{cases} y'(t) = f(t,y), & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0. \end{cases}$

λύνεται μονοσήμαντα.

Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[a,b]$: $a=t^0<t^1<\dots<t^N=b$, με βήμα $h=\frac{b-a}{N}$, $N\in\mathbb{N}$, όπου $t^i=a+ih$, $i=0,1,2,\dots,N$.

Οι προσεγγίσεις $y^1, y^2, \dots, y^n$ που δίνει η μέθοδος του Euler για ομοιόμορφη διαμέριση με βήμα h θα δίνονται από την αναδρομική σχέση:

$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$, $n=0,1,2,\dots,N-1$

με δεδομένο ότι $y^0 = y_0$.

1ος τρόπος κατασκευής της μεθόδου Euler (αριθμητική διαφόριση)

Έχουμε την Δ.Ε. $y'(t) = f(t,y(t))$, $t\in[a,b]$

Προσεγγίζω την παράγωγο $y'(t^n)$ με το πηλίκο εμπροσθίων διαφορών:

$$y'(t^n) \simeq \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \simeq f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστώντας τα $y(t^i)$ με y^i έχουμε:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} \simeq f(t^n, y^n) \Rightarrow y^{n+1} \simeq y^n + h f(t^n, y^n)$$

Δευτέρα 7/11/2016

Επανάληψη:

well possed Π.Α.Τ: ύπαρξη, μοναδικότητα κ' ευστάθεια.

Μέθοδος του Euler

Π.Α.Τ (1): $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

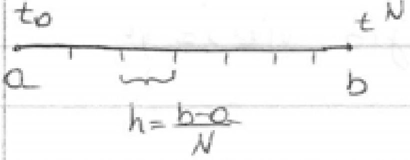
Διακριτό Π.Α.Τ (2) $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), & t^n = a + hn, \ 0 \le n \le N \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

Αριθμητική διαφόριση

Γνωρίζω ότι $y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$

Προσεγγίζω την παράγωγο με εμπρόσθιες πεπερασμένες διαφορές (Ε.Π.Δ).

(744)



$N+1$: κόμβοι, N: διαστήματα.

και προκύπτει: $y'(t^n) \simeq \dfrac{y(t^{n+1})-y(t^n)}{h}$

$2^{\text{ος}}$ τρόπος κατασκευής της μεθόδου Euler: Αριθμητική Ολοκλήρωση

Ολοκληρώνοντας την Δ.Ε. $y'(t)=f(t,y(t))$ από t^n έως t^{n+1} έχουμε:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1})-y(t^n) = \underbrace{(t^{n+1}-t^n)}_{\text{βάση}}\underbrace{f(t^n,y(t^n))}_{\text{ύψος}}$$

$$\Rightarrow y^{n+1}-y^n = hf(t^n,y^n)$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + hf(t^n,y^n)$$

όπου $y(t^{n+1})$: αναλυτική λύση
κ' y^{n+1}: προσεγγιστική λύση

$3^{\text{ος}}$ τρόπος κατασκευής της μεθόδου Euler Ανάπτυγμα Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor της $y(t^{n+1})$ γύρω από το t^n είναι:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + O(h^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n)$ κ' για $y(t^i) = y^i$

$\Rightarrow \boxed{y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)}$

Το "O" ονομάζεται μεγάλο όμικρον του Landau ή ασυμπτωτικό σύμβολο άνω φράγματος. Όταν σε μία οριακή διαδικασία για $t \to t_0$ η ισότητα $f(t) = O(g(t))$ σημαίνει ότι η f εκφράζεται ως γινόμενο μίας συνάρτησης g επί μία φραγμένη συνάρτηση στην περιοχή του t_0.

(Πρακτικά: στο ανάπτυγμα Taylor το $O(h^2)$ είναι οι όροι: $\frac{h^2}{2!} y''(t^n) + \frac{h^3}{3!} y'''(t^n) + \dots$)

Μέθοδος Euler (άμεση μέθοδος)

Π.Α.Τ: $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

Συνέπεια της μεθόδου Euler (τοπικό σφάλμα)

Το δ^n είναι το τοπικό σφάλμα της μεθόδου και ισούται με τη διαφορά της προσεγγιστικής από την αναλυτική λύση, δηλ:

$$\boxed{\delta^n = y(t^{n+1}) - y^{n+1} = y(t^{n+1}) - (y^n + h f(t^n, y^n))}$$

Υποθέτουμε ότι $y \in C^n[a,b]$, για $n=2$, τότε: από το ανάπτυγμα Taylor:

744

$$\delta^{n+1} = \left[y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)\right] - \left[y(t^n) + h f(t^n, y(t^n))\right]$$

ο όρος που θα δώσει το μεγαλύτερο σφάλμα.

$$\Rightarrow \delta^{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n), \text{ όπου } \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Η Euler είναι συνεπής αν το δ^n πηγαίνει στο μηδέν ($\delta^n \to 0$) όταν το βήμα $h \to 0$.
Η μέθοδος έχει τοπική τάξη ακρίβειας 2.

<u>Ευστάθεια της Euler</u>

Θα προσδιορίσουμε τα φράγματα για τα σφάλματα, ε^n, της μεθόδου Euler.

<u>Υπόθεση</u>: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς y, δηλ. $\exists L \geq 0$, $\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$:
$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$.

Τα προβλήματα αρχικών τιμών γράφονται:

$$(1) \begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \end{cases} \quad \& \quad (2) \begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f(t^n, z^n), \ n = 0, 1, \ldots, N-1, \ h = \frac{b-a}{N} \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

Έχουμε $\varepsilon^n = y^n - z^n$

$$\varepsilon^{n+1} = y^{n+1} - z^{n+1} \overset{(1),(2)}{=\!=\!=} \underbrace{y^n - z^n}_{=\varepsilon^n} + h\left[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)\right]$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| = \left|\varepsilon^n + h\left[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)\right]\right| \xrightarrow[\text{ιδιότητα}]{\text{τριγωνική}}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + h\left|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)\right| \xrightarrow[\text{Lipschitz}]{\text{συνθήκη}}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq (1 + hL)\, |\varepsilon^n|$$

Μπορεί να βρεθεί φράγμα συναρτήσει του $|\varepsilon^0| = |y^0 - z^0|$;

Έχουμε: $|\varepsilon^{n+1}| \leq (1+hL)|\varepsilon^n| \leq (1+hL)(1+hL)|\varepsilon^{n-1}| \Rightarrow$
$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq (1+hL)^2 |\varepsilon^{n-1}|$

Επαγωγικά, μπορούμε ν.δ.ο: $|\varepsilon^{n+1}| \leq (1+hL)^{n+1} |\varepsilon^0|$

Από το Θ. Taylor έχουμε: $e^{hL} = 1 + hL + \frac{(hL)^2}{2!} + \frac{(hL)^3}{3!}$

άρα, $e^{hL} \geq 1 + hL$

(αλλιώς: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$)

Συνεπώς, $|\varepsilon^{n+1}| \leq e^{hLn} |\varepsilon^0|$

όταν $n \to N$, τότε $hN = b-a$ (αφού $h = \frac{b-a}{N}$)

οπότε $|\varepsilon^n| \leq e^{hLn} |\varepsilon^0| \leq e^{L(b-a)} |\varepsilon^0|$, $\forall n : 0 \leq n \leq N$.

Άρα, $\boxed{\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon^n| \leq e^{L(b-a)} |\varepsilon^0|}$

<u>Συμπέρασμα:</u> Η σταθερά $C = e^{L(b-a)}$ περιγράφει το φράγμα κ' εξαρτάται τόσο από την L, όσο κ' από το διάστημα $[a,b]$ (ανεξάρτητη της διαμέρισης). Επίσης, το φράγμα εξαρτάται από την διαφορά των αρχικών συνθηκών ($\varepsilon^0 = y^0 - z^0$).

(744)

Ακρίβεια της Euler (ολικό σφάλμα)

Θεώρημα: Έστω $f \in C([a,b]\times\mathbb{R})$ κ' πληροί τη συνθήκη Lipschitz κ' έστω $y \in C^2[a,b]$, λύση του Π.Α.Τ. Αν $y^0, y^1, \dots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η Euler για ομοιόμορφη διαμέριση του $[a,b]$, με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$, τότε:

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) h \quad (*),$$

όπου $M = \max_{t\in[a,b]} |y''(t)|$, L: σταθερά Lipschitz.

Λήμμα: Έστω $\delta > 0$ κ' $k, d_0, d_1, \dots$ μη αρνητικοί αριθμοί: $d_i \le (1+\delta) d_i + k$, $i = 0,1,2,\dots$ (1)
Τότε ισχύει: $d_n \le d_0 e^{n\delta} + k\frac{e^{n\delta}-1}{\delta}$, $n = 0,1,2,\dots$ (2)

Απόδειξη του Λήμματος
Επαγωγικά, $n=0$, η (2) ισχύει: $d_0 \le d_0 + k\frac{e^0-1}{\delta} = d_0$

Για $n \ge 1$, λόγω της (1) έχουμε ότι:

$$d_n \le (1+\delta)^n d_0 + k[1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + \dots + (1+\delta)^{n-1}]$$

άθροισμα γεωμετρικής προόδου

ή $d_n \le (1+\delta^n) d_0 + k\frac{(1+\delta)^n - 1}{(1+\delta)-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow d_n \le (1+\delta)^n d_0 + k\frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta}$$

$1+\delta \le e^\delta$, άρα $d_n \le e^{\delta n} d_0 + k\frac{e^{\delta n}-1}{\delta}$

Απόδειξη του θεωρήματος

Έστω $n=\{0,1,2,\dots,N-1\}$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor έχουμε ότι:

$$y(t^{n+1})=y(t^n)+hy'(t^n)+\frac{h^2}{2}y''(\xi^n),\ \xi^n\in(t^n,t^{n+1})$$

ή $y(t^{n+1})=y(t^n)+hf(t^n,y(t^n))+\frac{h^2}{2}y''(\xi^n)$ (3)

από το Π.Α.Τ. (2) ο αναδρομικός τύπος της Euler είναι: $y^{n+1}=y^n+hf(t^n,y^n)$ (4).

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3) ε' (4) έχουμε:

$$\varepsilon^{n+1}=y(t^{n+1})-y^{n+1}=y(t^n)-y^n+h\left[f(t^n,y(t^n))-f(t^n,y^n)\right]+\frac{h^2}{2}y''(\xi^n)$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{n+1}=\varepsilon^n+h\left[f(t^n,y(t^n))-f(t^n,y^n)\right]+\frac{h^2}{2}y''(\xi^n)$$

$$|\varepsilon^{n+1}|\le|\varepsilon^n|+h|f(t^n,y(t^n))-f(t^n,y^n)|+\frac{h^2}{2}|y''(\xi^n)|,$$

λόγω της τριγωνικής ιδιότητας.

Από τη συνθήκη Lipschitz έχουμε:

$$|\varepsilon^{n+1}|\le(1+hL)|\varepsilon^n|+\frac{h^2}{2}|y''(\xi^n)|,\ n=0,1,2,\dots,N-1.$$

ή $|\varepsilon^{n+1}|\le(1+hL)|\varepsilon^n|+|\delta^n|,\ n=0,1,2,\dots,N-1.$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|\le(1+hL)|\varepsilon^n|+\max_{0\le i\le N-1}|\delta^i|$$

όπου $\max_{i=0,\dots,N-1} |\delta^i|$ είναι το μέγιστο τοπικό σφάλμα της μεθόδου Euler.

Από το προηγούμενο λήμμα θέτοντας: $d_n = |\varepsilon^n|$, $\delta = hL$ κ' $k = \max_{i=0,\dots,N-1} |\delta^i|$, προκύπτει:

$$|\varepsilon^n| \leq |\varepsilon^0| e^{nhL} + \max_{0\leq i\leq N-1} |\delta^i| \frac{e^{nhL}-1}{hL}$$

Όμως, $|\varepsilon^0| = |y(a) - y^0| = |y_0 - y_0| = 0$, $nh \leq Nh = b-a$.

Άρα, έχουμε ότι $|\varepsilon^n| \leq \frac{h^2}{2} \max_{t\in[a,b]} |y''| \frac{e^{L(b-a)}-1}{hL} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varepsilon^n| \leq \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)h$, όπου $M = \max_{t\in[a,b]} |y''|$,

L: σταθερά Lipschitz, $|\varepsilon^n| = \max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - y^n|$.

<u>Σημείωση:</u> 1) Το θεώρημα λέει ότι το ολικό σφάλμα της μεθόδου Euler εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος: a, b, y_0, f.

2) Το φράγμα του σφάλματος είναι γινόμενο της $c = \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)$ και του βήματος h (στην 1^{η} δύναμη). Η μέθοδος Euler έχει τάξη ακρίβειας τουλάχιστον ένα.

Δευτέρα 14/11/2016

Επανάληψη

Μέθοδος του Euler (άμεση μέθοδος)

Π.Α.Τ.: $\begin{cases} y' = f(t,y), \ t \in [a,b] \\ y(a) = y_0. \end{cases}$

η διακριτή μορφή Π.Α.Τ: $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

Συνέπεια της μεθόδου (τοπικό σφάλμα).

$$\boxed{|\delta^n| = \frac{h^2}{2} |y''(\xi)|, \ \xi^n \in (t^n, t^{n+1})}$$

(ακρίβεια της μεθόδου: 2ης τάξης τοπικά)

Ευστάθεια της μεθόδου: $\boxed{|\varepsilon^n| = |y^n - z^n| \leq c|\varepsilon^0|}$
όπου $c = e^{L(b-a)}$, $|\varepsilon^0| = |y^0 - z^0|$.
Η c δεν εξαρτάται από το βήμα $h = \frac{b-a}{N}$.

Ακρίβεια της μεθόδου (ολικό σφάλμα):

$$\boxed{\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right] h, \ M = \max_{t \in [a,b]} |y''(t)|}$$

(Δεν είναι δυνατό να βελτιώσουμε τη δύναμη του h στο φράγμα (h^1) για την ακρίβεια της άμεσης μεθόδου του Euler)

Η άμεση μέθοδος, $y^{n+1} = y^n + h y^n = (1+h) y^n$ χρησιμοποιεί μόνο το προηγούμενο βήμα, ενώ

(744)

η πεπλεγμένη, $y^{n+1} = y^n + h y^{n+1} \Rightarrow (1-h)\, y^{n+1} = y^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{(1-h)\, y^{n+1}}{1-h} = y^n \frac{1}{1-h}$, χρησιμοποιεί και το αμέσως

επόμενο βήμα, έτσι πρέπει να καταλήξω σε κάποιο σύστημα της μορφής $Ay=b$.

<u>Παράδειγμα 1 (Παλιό Θέμα)</u>: Έστω ότι δίνεται το Π.Α.Τ: $\begin{cases} y' = 2t, & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Ν.δ.ο. η ακρίβεια της (άμεσης) Euler είναι ακριβώς 1.

<u>Λύση</u>

Η λύση της Δ.Ε. $y' = 2t$, $t \in [0,1]$ είναι $y(t) = t^2 + c$, $t \in [0,1]$ (αφού ολοκληρώσουμε από 0 έως t).

Για $c=0$: $y(t) = t^2 \Rightarrow y'(t) = 2t$ κ' $y''(t) = 2$.

Δηλ. η 2η παράγωγος της y είναι σταθερή και έτσι η συνέπεια της μεθόδου:
$|\delta^n| = \frac{h^2}{2} |y''(\xi^n)|$, $\xi^n \in (t^n, t^{n+1})$ δεν εξαρτάται

από το ξ^n.

Θεωρούμε ομοιόμορφη διαμέριση με $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$ και βήμα $h = \frac{1-0}{N} = \frac{1}{N}$ κ' $t^n = 0 + nh = nh$.

Έστω, ακόμη, $y^0, y^1, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις που μας δίνει η μέθοδος Euler. Τότε έχουμε:
$y^{n+1} = y^n + 2ht^n \Rightarrow y^{n+1} = y^n + 2nh^2$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Οπότε αναδρομικά μπορώ να γράψω ότι:

$$y^n = y^0 + 2[1+2+\dots+(n-1)]h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^n = y^0 + 2\frac{n(n-1)}{2}h^2$$

$$\Rightarrow y^n = y^0 + n(n-1)h^2 \quad \left(\text{από Α.Σ. } y^0=0\right)$$

$$\Rightarrow y^n = n(n-1)h^2, \; n=0,1,2,\dots,N.$$

Αν $n=N$, τότε: $y^N = N(N-1)h^2 \xrightarrow{h=\frac{1}{N} \Rightarrow N=\frac{1}{h}} y^n = 1-h$

Όταν $t^N=1$, το ολικό σφάλμα της μεθόδου είναι: $\max\limits_{0\le n\le N}|\varepsilon^n| = |\varepsilon^N| = |y(t^N)-y^N| = |y(1)-(1-h)| =$

$= |1^2 - 1 + h| = |h| \doteq h^1$.

Συνεπώς, η τάξη ακρίβειας του δοθέντος Π.Α.Τ. είναι ακριβώς 1.

Παράδειγμα 2: Δίνεται το Π.Α.Τ. $\begin{cases} y'(t) = 1 - x\cos(xy), & x\in[0,2] \\ y(0)=0 \end{cases}$

Ν.Δ.ο. η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη Lipschitz ως προς y κ' να εκτιμήσετε τη σταθερά L. Έχει το Π.Α.Τ. μοναδική λύση.

Λύση

Έχουμε ότι η δοθείσα f είναι: $f(x,y) = 1 * \cos(xy)$ κ' είναι συνεχής.

Από το θεώρημα μέσης τιμής $\forall\, y_1, y_2$, $\exists\, \xi : y_1 < \xi < y_2$:

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)(y_1-y_2)$$

όπου $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) = x^2 \sin(xy) \le 4.$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)\right| |y_1-y_2| \le 4|y_1-y_2|$$

Έτσι, πληρούται η συνθήκη Lipschitz με σταθερά $L=4$.

<u>Μοναδικότητα λύσης</u>: η f είναι συνεχής ① συνάρτηση για $t\in[0,2]$, $y\in(-\infty,\infty)$ ισχύει η ολική Lipschitz ②. Τότε ισχύει το θεώρημα ύπαρξης & μοναδικότητας της λύσης, άρα το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση.

<u>Παράδειγμα 3</u>: Να προσεγγιστεί η λύση του Π.Α.Τ. (1): $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$ με την άμεση Euler & με ανάπτυγμα Taylor $2^{ης}$ τάξης για ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$ με $h=0.1$. Τι παρατηρείται; Να υπολογιστεί το δ^n, για κάθε βήμα που πραγματοποιείται.

<u>Λύση</u>

Για το (1): $t_0=0,\ y_0=1,\ y^{n'}=f(t^n,y^n)=y^n,\ n=0,1,\dots$

<u>Για το t</u>: $t^0=0,\ t^1=0+0.1=0.1,\ t^2=0+2\cdot 0.1=0.2,$
$t^3=0+3\cdot 0.1=0.3$

1) Με την μέθοδο Euler: $y^{n+1}=y^n+hy^{n'}+O(h^2)$
$$y^{n+1}=y^n+hy^n+O(h^2)$$

$\underline{n=0}: y^1 = y^0 + h y^{0'} = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1 \Rightarrow y^1 = 1.1$

$\underline{n=1}: y^2 = y^1 + h y^{1'} = y^1 + h y^1 = 1.1 + 0.1(1.1) = 1.21$

$\underline{n=2}: y^3 = y^2 + h y^{2'} = y^2 + h y^2 = 1.21 + 0.1(1.21) = 1.331$

<u>Matlab</u>	<u>Mathematica</u>
N=10; for i=1:N $y^{(i+1)} = y^{(i)} + h * y^{(i)}$ end	NDSolve[y'[t]==y[t],{t,0,1},Euler]

<u>Πίνακας αποτελεσμάτων:</u>

n	t^n	$y(t^n)$	$y^n(\text{Euler})$	$y^n(\text{Taylor})$	δ_E^n	δ_T^n
0	0	1	1	1	0	0
1	0.1	1.1052	1.1000	1.1050	0.0052	0.0002
2	0.2	1.2214	1.2100	1.2210	0.0114	0.0004
3	0.3	1.3498	1.3310	1.3492	0.0188	0.0006

Ανάπτυγμα Taylor $\underline{2ης}$ τάξης:

$$y^{n+1} = y^n + h y^{n'} + \frac{h^2}{2} y^{n''} + O(h^3)$$

Όταν $h \to 0$, Euler $\delta^n \to 0$
Taylor $\delta^n \to 0$

(Η Taylor τείνει πιο γρήγορα στο 0, πράγματι για $h=0.1$: $\delta_E^n \simeq 0.1^2$ ενώ $\delta_T^n \simeq 0.1^3$)

$$n=0: y^1 = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) y^0 \Rightarrow y^1 = \left(1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2}\right) 1 = 1.1050$$

$$n=1: y^2 = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) y^1 \Rightarrow y^2 = \left(1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2}\right) 1.1050 = 1.2210$$

$n=2: y^3=\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right)y^2 \Rightarrow y^3=\left(1+0.1+\frac{0.1^2}{2}\right)1.2210=1.3492$

Παρατηρούμε ότι: η Taylor είναι καλύτερη μέθοδος, διότι δίνει πολύ μικρότερο σφάλμα, όπως περιμέναμε λόγω του $O(h^3)$.

Η μέθοδος Euler γενικεύεται για προβλήματα αρχικών τιμών Π.Α.Τ. συστημάτων Σ.Δ.Ε. 1ης τάξης

$$(7):\begin{cases}\bar{y}'(t)=\bar{f}\,(t,\bar{y}(t)), & t\in[a,b]\\ y(a)=y_0\ , & \bar{y}_0\in\mathbb{R}^m\end{cases}$$

με: $f:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m,\ m\in\mathbb{N}$.

Συνέπεια της μεθόδου Euler για συστήματα Σ.Δ.Ε. (7). Για $\bar{y}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, έχουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor γράφεται ως

$$y_i(t^{n+1})=y_i(t^n)+hy_i'(t^n)+\frac{h^2}{2}y_i''(\xi^n),\ \xi^n\in(t^n,t^{n+1})$$

για $i=1,\dots,m$.

οπότε: $\bar{y}(t^{n+1})=\bar{y}(t^n)+h\bar{y}'(t^n)+\frac{h^2}{2}\delta^n$

όπου: $$\bar{y}'(t^n)=\begin{pmatrix}y_1'(t^n)\\ y_2'(t^n)\\ \vdots\\ y_m'(t^n)\end{pmatrix},\quad \delta^n=\begin{pmatrix}y_1''(\xi^n)\\ y_2''(\xi^n)\\ \vdots\\ y_m''(\xi^n)\end{pmatrix}$$

Εισάγω κάποια νόρμα:

1η περίπτωση $\|\cdot\|_\infty$

$$\|\delta^n\|_\infty\le\frac{h^2}{2}\max_{1\le i\le n}|y_i''(\xi^n)|\le\frac{h^2}{2}\max_{1\le i\le m}\left(\max_{t\in[a,b]}|y_i''(t)|\right)=$$

$= \frac{h^2}{2} \max_{t\in[a,b]} \left(\max_{1\le i\le n} |y_i''(t)| \right)$, όπου $\max_{1\le i\le n} |y_i''(t)| = \|y''\|_\infty$

$\|S^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} M$, $M = \max_{t\in[a,b]} \|y''(t)\|_\infty$

η συνέπεια της Euler για συστήματα Σ.Δ.Ε.

Για τυχαία νόρμα του $\mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|$

ισχύει ότι $\exists\, c_1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$: $\|x\| \le c_1 \|x\|_\infty$

<u>2η περίπτωση</u>: Έτσι για οποιαδήποτε νόρμα του $\mathbb{R}^m$: $\|S^n\| \le c_1 \|S^n\|_\infty \le c_1 \frac{h^2}{2} M$, $M = \max_{t\in[a,b]} \|y''(t)\|_\infty$

<u>Θεώρημα (Ακρίβεια, δηλ. ολικό σφάλμα της Euler για συστήματα Σ.Δ.Ε.)</u>

Έστω $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, να είναι συνεχής & να πληροί τη συνθήκη Lipschitz.

Έστω $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$, $y_i \in C^2[a,b]$, $i = 1, 2, \dots, m$. η λύση του Π.Α.Τ. (7). Αν $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η Euler με ομοιόμορφο διαμερισμό $h = \frac{b-a}{N}$, τότε ισχύει ότι:

$$(8) \quad \max_{0\le n\le N} \|\bar{y}(t^n) - \bar{y}^n\| \le c_1 \frac{M}{2L} \left[e^{L(b-a)} - 1 \right] h^1$$

$M = \max_{t\in[a,b]} \|y''(t)\|_\infty$, για οποιαδήποτε νόρμα του $\mathbb{R}^n$.

(744)

Σφάλμα στρογγύλευσης

Επειδή η τάξη ακρίβειας της Euler είναι μόνο ένα, για να πάρουμε καλές προσεγγίσεις πρέπει να πάρουμε μικρό h, δηλ. να χωρίσουμε το διάστημα σε πολλά μέρη. Επειδή οι πράξεις γίνονται με υπολογισμούς πεπερασμένης ακρίβειας τα σφάλματα στρογγύλευσης μπορεί να συσσωρευθούν & τελικά να αλλοιώσουν το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το γραμμικό Π.Α.Τ.

$$(P): \begin{cases} y' = \lambda y, \quad t \in [0, +\infty) \quad (\text{πρόβλημα δοκιμής}) \\ y(0) = 1, \ \lambda < 0, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

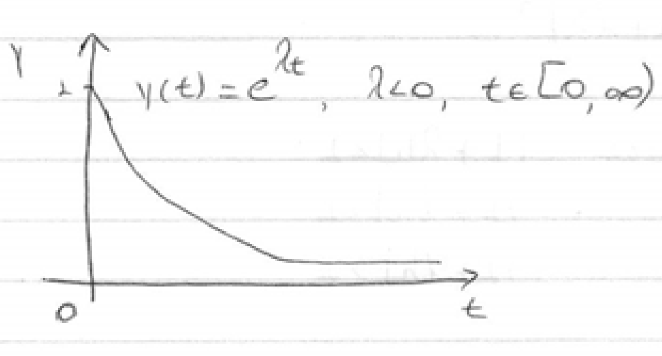
Λύση

Η λύση του Π.Α.Τ. είναι: $y(t) = e^{\lambda t}$ & φθίνει εκθετικά με τον χρόνο ($t \to \infty$).

Το διακριτό πρόβλημα που δίνει η Euler είναι:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \lambda h y^n = (1+\lambda h) y^n = (1+\lambda h)^2 y^{n-1} \\ y(0) = y^0 = 1 \end{cases}$$

Επαγωγικά, καταλήγουμε: $y^n = (1+\lambda h)^n y^0 = (1+\lambda h)^n, \ n \geq 0$



Δευτέρα 21/11/2016

<u>επανάληψη:</u>

Π.Α.Τ.(1): $\begin{cases} y'(t)= f(t, y(t)) , & t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

Άμεση Euler (Explicit Euler)

(2): $\begin{cases} y^{n+1}= y^n + h f(t^n, y^n) \\ y^0= y_0 \end{cases}$

<u>Παράδειγμα:</u> Δίνεται το πρόβλημα δοκιμής:

(9): $\begin{cases} y' = \lambda y , & t\in[0,\infty) \\ y(0)=1 , & \lambda<0 , \lambda\in\mathbb{R} \end{cases}$

<u>Λύση</u>

Έχουμε (10): $\begin{cases} y^{n+1}=y^n+\lambda h y^n , & n\geq 0 \\ y^0 =1 \end{cases}$ το

διακριτό πρόβλημα.

Η ακολουθία $y^{n+1}=(1+\lambda h) y^n$ επαγωγικά δίνει
$y^n=(1+\lambda h)^n y^0 \Rightarrow y^n=(1+\lambda h)^n$.

Γνωρίζουμε ότι $nh=t$, άρα $y^n=\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda t}$

Στην πράξη οι υπολογισμοί γίνονται για κάποιο $h\in(0,1)$.

Για $n\geq 0$, $|y^n|=|1+\lambda h|^n$

Για $n\to\infty$:

Όταν $|y^n|\to 0$, τότε $|1+\lambda h|<1$

$|y^n|=1$, $|1+\lambda h|=1$

$|y^n|\to+\infty$, $|1+\lambda h|>1$

744

<u>Συμπέρασμα</u>: Η μέθοδος Euler συγκλίνει, δηλ. δίνει προσεγγίσεις οι οποίες μιμούνται τη συμπεριφορά της λύσης του Π.Α.Τ., $y(t) = e^{\lambda t}$, μόνο όταν $|1+\lambda h| < 1$, δηλ. $\lambda h \in (-2, 0)$. Επίσης, οι προσεγγίσεις ικανοποιούν τη συνθήκη $|y^n| \leq 1, n \in \mathbb{N}$ ακριβώς όταν $|1+\lambda h| \leq 1$, δηλ. $\lambda h \in [-2, 0]$.

<u>Παρατήρηση</u>: Μια μέθοδος για την αριθμητική επίλυση του Π.Α.Τ. (1) είναι απόλυτα ευσταθής για κάποιο $h > 0$, αν όταν εφαρμοστεί το πρόβλημα δοκιμής Π.Α.Τ. (9), δίνει φραγμένες προσεγγίσεις, y^n, όταν $n \to \infty$.

Το διάστημα $I = [a, 0]$, με $-\infty < a \leq 0$ λέγεται διάστημα απόλυτης ευστάθειας της αριθμητικής μεθόδου.

<u>Συμπέρασμα</u>: Η μέθοδος Euler, στο παραπάνω παράδειγμα, είναι απόλυτα ευσταθής για $0 < h \leq -\frac{2}{\lambda}$, $\lambda < 0$.

Το διάστημα απόλυτης ευστάθειας είναι το $I = [-2, 0]$.

(Δεν θέλουμε πολύ μικρό βήμα διότι θα δημιουργηθεί πολύ μεγάλο σφάλμα συσσώρευσης, π.χ. $\lambda = -10$, $h \in (0, \frac{1}{5}]$)

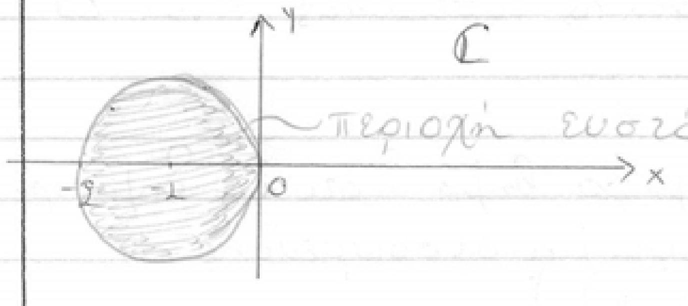
Περιοχή Απόλυτης Ευστάθειας

Ορισμός: Μία αριθμητική μέθοδος για την επίλυση του Π.Α.Τ. (1): $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$
λέγεται απόλυτα ευσταθής για $h>0$, αν όταν η αριθμητική μέθοδος (Α.Μ.) εφαρμοστεί στο πρόβλημα δοκιμής (2): $\begin{cases} y' = \lambda y, & t \in [0, +\infty) \\ y(0) = 1, & \lambda \in \mathbb{C}, \ Re(\lambda) \leq 0. \end{cases}$

Τότε δίνει προσεγγίσεις, y^n, $n \in \mathbb{N}^*$, που παραμένουν φραγμένες καθώς το $n \to \infty$.

Η περιοχή S του μιγαδικού επιπέδου τέτοια ώστε η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής, αν $\lambda h \in S$, λέγεται περιοχή απόλυτης ευστάθειας.

Η περιοχή απόλυτης ευστάθειας για την άμεση μέθοδο Euler στο μιγαδικό επίπεδο είναι η: $S = \{z \in \mathbb{C} : |1+z| \leq 1\}$, δηλ. είναι ο κλειστός κυκλικός δίσκος $|1+z| \leq 1$ με κέντρο το $(-1,0)$ κ' ακτίνα 1.



Πλεονεκτήματα άμεσης Euler
1) Άμεση μέθοδος, δηλ. $y^n = (1+h\lambda)^n y^0$
2) Πολύ εύκολο να προγραμματιστεί

3) Απαιτεί μόνο ένα συναρτησιακό υπολογισμό $(f(t^i, y^i))$ ανά βήμα.

Μειονεκτήματα της άμεσης μεθόδου Euler

1) Έχει μικρή τάξη ακριβείας (ένα):

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le Ch^1$$

2) Συνέπεια: υψηλό υπολογιστικό κόστος
υψηλά σφάλματα στρογγύλευσης.

3) Έχει πολύ μικρή περιοχή ευστάθειας (μόνο τον κυκλικό δίσκο κέντρου $(-1, 0)$ ς' ακτίνος 1).

Πεπλεγμένη μέθοδος Euler (Implicit Euler)

Προσεγγίζουμε την παράγωγο με το εξής πηλίκο:

$$\frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} = y'(t^n)$$ (οπισθιες πεπερασμένες διαφορές).

Οδηγούμαστε στην μέθοδο: $y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$ για $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ με $y^0 = y_0$.

Σε αυτήν τη μέθοδο το y^{n+1} δίνεται πεπλεγμένα και ο προσδιορισμός του απαιτεί την επίλυση μίας μη γραμμικής εξίσωσης.

π.χ. $\begin{cases} y' = y^2, & t \in [0, 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

παίρνει την πεπλεγμένη Euler: $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h (y^{n+1})^2 \\ y^0 = 1 \end{cases}$

Παρατήρηση: Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, δηλ. $\exists L \geq 0$: $\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$, τότε για h αρκετά μικρό ($h \ll 1$) τέτοιο ώστε $Lh < 1$ ορίζουμε: $g(x) = y^n + hf(t^{n+1}, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$, $g(x) - g(\bar{x}) = h[f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \bar{x})] \Rightarrow$

$\overset{h>0}{\Longrightarrow} |g(x) - g(\bar{x})| = h|f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \bar{x})| \leq Lh|x - \bar{x}|$

Άρα, για $Lh < 1$, η $g(x)$ είναι συστολή.

Επομένως, από το θεώρημα σταθερού σημείου θα έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο, το y^{n+1}.

(Το θ. σταθ. σημείου Brouwer αποδεικνύεται με το Θ.Μ.Τ.)

Παρατήρηση: Είναι η μέθοδος καλά ορισμένη; Δηλ. έχουμε ύπαρξη & μοναδικότητα των προσεγγίσεων.

Παράδειγμα: Το πρόβλημα δοκιμής: $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Τότε το διακριτό ανάλογο με την πεπλεγμένη μέθοδο Euler: $y^{n+1} = y^n + \lambda h y^{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 - \lambda h) y^{n+1} = y^n \Leftrightarrow y^{n+1} = \dfrac{1}{1 - \lambda h} y^n$

Αν $\lambda > 0$ & $h = \dfrac{1}{\lambda}$, έχουμε: $0 y^{n+1} = y^n$

744

1) Αν $y^n \neq 0$, δεν υπάρχει λύση
2) Αν $y^n = 0$, $\forall\, y^{n+1}$ υπάρχει λύση

Συμπέρασμα: Χρειαζόμαστε υποθέσεις για την f ς' για το βήμα h για να είναι η μέθοδος καλά ορισμένη.

Συνέπεια της πεπλεγμένης Euler:

Από το Θ. Taylor έχουμε:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\,y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n), \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

$$\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n), \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$ (ίδια με την όμεσον)

Ευστάθεια πεπλεγμένης Euler:
Θεωρούμε τα 2 διακριτά Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \\ y^0 = y_0 \qquad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$ ς'

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f(t^{n+1}, z^{n+1}) \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

Άρα, $\varepsilon^{n+1} = y^{n+1} - z^{n+1} \Rightarrow$

$$\varepsilon^{n+1} = (y^n - z^n) + h\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\right]$$

$$|\varepsilon^{n+1}| = |y^{n+1} - z^{n+1}|$$

από την τριγωνική ιδιότητα:

$$|y^{n+1}-z^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + h|f(t^{n+1},y^{n+1})-f(t^{n+1},z^{n+1})|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}| \le |y^n-z^n| + hL|y^{n+1}-z^{n+1}|$$

όπου L η σταθερά Lipschitz.

$$\Rightarrow (1-hL)|y^{n+1}-z^{n+1}| \le |y^n-z^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}| \le \frac{1}{1-hL}|y^n-z^n|$$

Παρατηρώ για $Lh \le \frac{1}{2}$ ισχύει ότι:

$$\frac{1}{1-Lh} \le 1+2Lh \therefore |y^{n+1}-z^{n+1}| \le \frac{1}{1-Lh}|y^n-z^n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}| \le (1+2Lh)|y^n-z^n|$$

Επαγωγικά θα έχουμε ότι:

$$|y^n-z^n| \le (1+2Lh)^n \cdot |y^0-z^0| \le e^{2Lhn}|y^0-z^0|$$

Άρα, $\max\limits_{0\le n\le N}|y^n-z^n| \le e^{2L(b-a)}|y^0-z^0|$,

αφού $h=\frac{b-a}{N} \Rightarrow hN=b-a$.

Εν αντιθέσει με την άμεση Euler που έχω $e^{L(b-a)}|y^0-z^0|$, άρα η πεπλεγμένη είναι πιο ευέλικτη.

<u>Περιοχή απόλυτης ευστάθειας</u>: Έστω το πρόβλημα δοκιμής $\begin{cases} y'=\lambda y, & t\ge 0 \\ y(0)=1, & \lambda\in\mathbb{C},\ Re(\lambda)\le 0. \end{cases}$

744

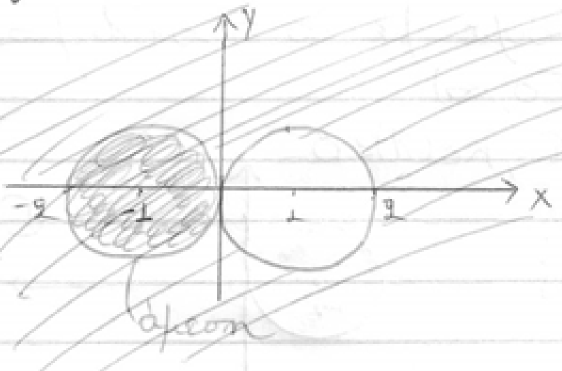
Τότε η πεπλεγμένη Euler: $y^{n+1} = y^n + \lambda y^{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^{n+1} - \lambda y^{n+1} = y^n \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1}{1-\lambda h} y^n$ κ'

Επαγωγικά έχουμε: $y^n = \frac{1}{(1-\lambda h)^n} y^0 = \frac{1}{(1-\lambda h)^n}, n \in \mathbb{N}$

Άρα, η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της πεπλεγμένης Euler είναι: $|1-\lambda h| \geq 1$.
Δηλ. η περιοχή S είναι: $S = \{z \in \mathbb{C} : |1-z| \geq 1\}$
Το εξωτερικό του ανοιχτού δίσκου $|1-z| < 1$ με κέντρο το $(1,0)$ κ' ακτίνα 1.

($|1-z| < 1 \xRightarrow{z \in \mathbb{R}} -2 < -z < 0 \Rightarrow 0 < z < 2$ πρόκειται για κυκλικό δίσκο στο $\mathbb{C}$ με κέντρο 1)



Η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της πεπλεγμένης Euler στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

<u>Ακρίβεια της πεπλεγμένης Euler</u>
(απόδειξη από το βιβλίο).

<u>1η περίπτωση</u>: Η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη Lipschitz, τότε για $Lh < \frac{1}{2}$ αποδεικνύεται ότι:

$$y(t^{n+1}) - y^n = \frac{1}{1-Lh}\left(y(t^n)-y^n\right) \le 1+2Lh\left(y(t^n)-y^n\right)$$

$$|y(t^{n+1})-y^n| \le |y(t^n)-y^n| + e^{2Lhn}\,|y(t^n)-y^n|$$

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{2L(b-a)}-1\right]h, \quad M=\max_{t\in[a,b]}|y''(t)|$$

Η ακρίβεια, λοιπόν της πεπλεγμένης είναι 1.

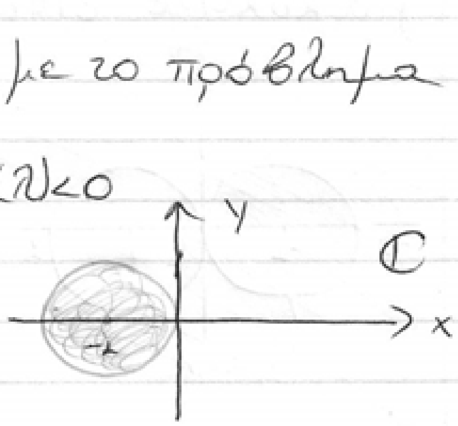
Δευτέρα 28/11/2016

<u>Επανάληψη:</u>

<u>Περιοχή απόλυτης ευστάθειας</u>

Άμεση Euler: Δουλεύουμε με το πρόβλημα δοκιμής: $\begin{cases} y'=\lambda y, & t\in[0,\infty) \\ y(0)=1, & \lambda\in\mathbb{C},\ Re(\lambda)<0 \end{cases}$

$S=\{z\in\mathbb{C} : |z+1|\le 1\}$

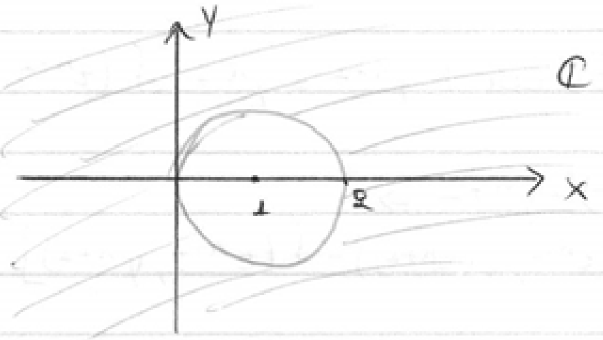


Πεπλεγμένη Euler: Π.Α.Τ. $\begin{cases} y'=f(t,y(t)), & t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

Διακριτό Π.Α.Τ. Πεπλ. Euler $\begin{cases} y^{n+1}=y^n+hf(t^{n+1},y^{n+1}) \\ y^0=y_0 \end{cases}$

Δουλεύουμε με το πρόβλημα δοκιμής:
$y^{n+1}=y^n+\lambda h y^{n+1}, \quad S=\{z\in\mathbb{C} : |1-z|\ge 1\}$

744



Παρατηρούμε ότι η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της πεπλεγμένης Euler είναι πολύ ευρύτερη αυτής της άμεσης.

Συνέπεια της πεπλεγμένης μεθόδου Euler
(τοπικό σφάλμα)

$|\delta^n| = \frac{h^2}{2}|y''(t)|$, $t \in [a,b]$, 2ης τάξης

Ευστάθεια της πεπλεγμένης Euler
(εξάρτηση από τις Α.Σ.)

Ακρίβεια της πεπλεγμένης Euler (ολικό σφάλμα).

1η περίπτωση: Η f να είναι Lipschitz, θεωρούμε ομοιόμορφη διαμέριση ς' $Lh < \frac{1}{2}$

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{2L(b-a)} - 1\right]h, \quad M = \max_{t\in[a,b]} |y''(t)|$$

2η περίπτωση: Η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz

Taylor: $y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + \delta^n$

κ' η πεπλεγμένη Euler : $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$

οπότε: $\varepsilon^{n+1} = y(t^{n+1}) - y^{n+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h\left[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] + \delta^n$

Πολ/ζω κ' τα δύο μέλη με $\varepsilon^{n+1} \left(= y(t^{n+1}) - y^{n+1}\right)$
Παίρνω κ' την απόλυτη τιμή:

$|\varepsilon^{n+1}|^2 \leq |\varepsilon^n||\varepsilon^{n+1}| + |\delta^n||\varepsilon^{n+1}| \Rightarrow$
$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + |\delta^n|$
$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + \max\limits_{0 \leq i \leq N-1} \delta^i$

Επαγωγικά προκύπτει: $|\varepsilon^n| \leq n \max\limits_{0 \leq i \leq N-1} |\delta^i|$,

αφού $|\varepsilon^0| = |y^0 - y_0| = 0$

Έχουμε: $\max\limits_i |\delta^i| \leq \frac{h^2}{2} \max |y''(t)|, \ t \in [a,b]$

$\max |y''(t)| = M = O(h^2)$, δηλ. η συνάρτηση h^2 είναι πολλαπλασιασμένη με μία φραγμένη συνάρτηση

Άρα, $|\varepsilon^n| \leq n h \frac{M}{2} h \leq \frac{b-a}{2} M h$, αφού $Nh = b-a$

Τελικά, $\max\limits_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2}(b-a)h$,

όπου $M = \max\limits_{t \in [a,b]} |y''(t)||$

(Η συνθήκη αυτή είναι λίγο καλύτερη γιατί δεν εξαρτάται από τη σταθερά L κ' την εκθετική

(744)

συνάρτηση η οποία απειρίζεται πιο γρήγορα)

Άσκηση: Θεωρούμε το Π.Α.Τ. $x(t), y(t), t \geq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(t) \\ & , t \geq 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) \\ x(0) = 1, \ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση

Γράφουμε το Π.Α.Τ. σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι: $\lambda^2 + 1 = p(\lambda)$, άρα οι λύσεις του είναι: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Η γενική λύση είναι: $c_1 e^{-it} + c_2 e^{it} =$

$$= \frac{1}{2} c_1 e^{-it} + \frac{1}{2} c_2 e^{it} + \frac{1}{2} c_1 e^{-it} + \frac{1}{2} c_2 e^{it} =$$

$$= A \cos t + B \sin t$$

Η παραπάνω ισότητα προκύπτει από τους τύπους του Euler:

$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \\ \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{it}}{2i} \end{cases}$$

α) Ν.Δ.ο ισχύει ο νόμος διατήρησης, δηλ.
$x^2(t)+y^2(t)=1,\ t\geq 0$.

Εαν δεν αντικαταστήσουμε τα x κ' y, μπορούμε να παραγωγίσουμε, ελπίζοντας να καταλήξουμε ότι το x^2+y^2 είναι κάτι σταθερό:

Έχουμε: $\left[x^2(t)+y^2(t)\right]'=2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=$

$=2x(t)\left[-y(t)\right]+2y(t)x(t)=-2x(t)y(t)+2x(t)y(t)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Άρα, } x^2(t)+y^2(t)=\text{σταθ.}\\ \text{Από τις Α.Σ.}: x^2(0)+y^2(0)=1+0=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2(t)+y^2(t)=1$.

β) Θεωρείστε τις προσεγγίσεις (x^n, y^n) τις οποίες παράγει η μέθοδος Euler (άμεση) για $h>0$.
Ν.Δ.ο $(x^n)^2+(y^n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Για $h>0$, εφαρμόζουμε την Euler στο δοθέν σύστημα:

$$\begin{pmatrix}x^{n+1}\\ y^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^n\\ y^n\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}-y^n\\ x^n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x^{n+1}=x^n-hy^n\\ y^{n+1}=y^n+hx^n\end{cases}$$

Έχουμε: $(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2=(x^n-hy^n)^2+(y^n+hx^n)^2$

$$\begin{aligned}&=(x^n)^2-\cancel{2hx^ny^n}+h^2(y^n)^2+(y^n)^2+\cancel{2hx^ny^n}+h^2(x^n)^2\\&=h^2(x^n)^2+h^2(y^n)^2+(x^n)^2+(y^n)^2\\&=(h^2+1)(x^n)^2+(h^2+1)(y^n)^2\\&=(h^2+1)\left[(x^n)^2+(y^n)^2\right]\end{aligned}$$

Επαγωγικά, λοιπόν, προκύπτει:

$$(x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)\left[(x^{n-1})^2 + (y^{n-1})^2\right] = (1+h^2)^n\left[(x^0)^2 + (y^0)^2\right] \Rightarrow$$

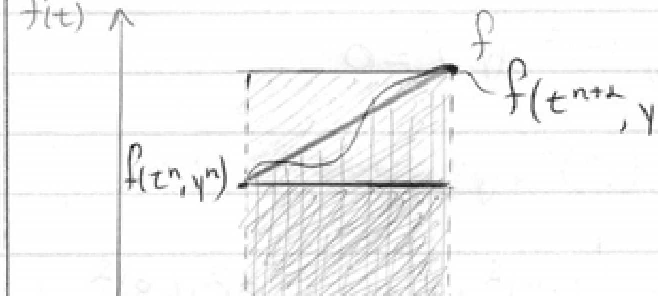
$$\overset{(a)}{\Longrightarrow} (x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \text{ αφού } 1+h^2>0.$$

Δηλ. αποδείξαμε ότι στη μέθοδο Euler δεν ισχύει ο νόμος διατήρησης που ισχύει για την αναλυτική λύση.
(Αυτό είναι λογικό, διότι κάθε νέα εκτίμηση της μεθόδου Euler αυξάνεται κατά h^2, αφού $(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = \left[(1+h^2)\,(x^n)^2 + (y^n)^2\right]$.)

γ) Θεωρείστε τις προσεγγίσεις (x_n, y_n) τις οποίες δίνει η μέθοδος του τραπεζίου για το παραπάνω σύστημα, για $h>0$. Ν.Δ.Ο: $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1, \forall n$.

<u>Μέθοδος Τραπεζίου (πεπλεγμένη μέθοδος)</u>

$$\text{Π.Α.Τ}: \begin{cases} y' = f(t,y), & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \xrightarrow[\text{Π.Α.Τ.}]{\text{Διακριτό}} \begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n,y^n) + f(t^{n+1},y^{n+1})\right] \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$



Άμεση Euler: $hf(t^n, y^n)$
Πεπλεγμένη Euler: $hf(t^{n+1}, y^{n+1})$
Κανόνας Τραπεζίου: $\frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο του τραπεζίου, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\left[\begin{pmatrix} -y^{n} \\ x^{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\begin{pmatrix} -y^{n} - y^{n+1} \\ x^{n} + x^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{n+1} = x^{n} - \frac{h}{2}\left(y^{n} + y^{n+1}\right) \\ y^{n+1} = y^{n} + \frac{h}{2}\left(x^{n} + x^{n+1}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{n+1} - x^{n} = -\frac{h}{2}\left(y^{n} + y^{n+1}\right) \\ y^{n+1} - y^{n} = \frac{h}{2}\left(x^{n} + x^{n+1}\right) \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας την $1^{η}$ εξίσωση με το $(x^{n+1}+x^{n})$ κ' την $2^{η}$ με $(y^{n+1}+y^{n})$ κ' προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$(x^{n+1}-x^{n})(x^{n+1}+x^{n}) + (y^{n+1}-y^{n})(y^{n+1}+y^{n}) =$$
$$= -\frac{h}{2}(y^{n}+y^{n+1})(x^{n+1}+x^{n}) + \frac{h}{2}(x^{n}+x^{n+1})(y^{n}+y^{n+1}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 - (x^{n})^2 + (y^{n+1})^2 - (y^{n})^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^{n})^2 + (y^{n})^2$$

Επαγωγικά, προκύπτει: $(x^{n})^2 + (y^{n})^2 = (x^{0})^2 + (y^{0})^2 = 1, \forall n$

δ) Τι μπορούμε να πούμε για τις προσεγγίσεις x^{n}, y^{n}, που παράγει η πεπλεγμένη Euler;

744

Εφαρμόζουμε την πεπλεγμένη Euler:

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{n+1} = x^n - h y^{n+1} \\ y^{n+1} = y^n + h x^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{n} = x^{n+1} + h y^{n+1} \\ y^{n} = y^{n+1} - h x^{n+1} \end{cases}$$

Έχουμε: $(x^n)^2 + (y^n)^2 = (x^{n+1} + h y^{n+1})^2 + (y^{n+1} - h x^{n+1})^2 =$

$$= (x^{n+1})^2 + \cancel{2h x^{n+1} y^{n+1}} + h^2 (y^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 - \cancel{2h x^{n+1} y^{n+1}} + h^2 (x^{n+1})^2 =$$

$$= (1+h^2)(x^{n+1})^2 + (1+h^2)(y^{n+1})^2 =$$

$$= (1+h^2)\left[(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2\right] \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{1+h^2>0} (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = \frac{1}{1+h^2}\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right]$$

Επαγωγικά, έχουμε: $(x^n)^2 + (y^n)^2 = \frac{1}{(1+h^2)^n}\left[(x^0)^2 + (y^0)^2\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = \frac{1}{(1+h^2)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(Δηλ. η πεπλεγμένη Euler παράγει φραγμένες λύσεις x^n ϗ y^n το άθροισμα των οποίων ισούται με 0 κ' όχι με 1 όπως στην αναλυτική λύση)

Άσκηση 2: Δίνεται το Π.Α.Τ.: $\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

$M \in \mathbb{R}^{m,m}$ ένας μη θετικά ορισμένος πίνακας, δηλ. $(Mx, x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Αν y^n είναι η προσέγγιση με τη βοήθεια της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler της $y(t^n)$ σ' $t^n = nh$.
Ν.δ.ο: $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$, $n \in \mathbb{N}^*$, όπου η $\|\cdot\|$ ευκλείδεια νόρμα. (δηλ. ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση).

Λύση

Η πεπλεγμένη Euler, μας δίνει:

$y^{n+1} = y^n + hMy^{n+1}$, άρα η ευκλείδεια νόρμα:

$\|y^{n+1}\|^2 = (y^{n+1}, y^{n+1}) = (y^n + hMy^{n+1}, y^{n+1}) =$

$= (y^n, y^{n+1}) + h(My^{n+1}, y^{n+1}) \leq (y^n, y^{n+1})$, αφού

ο M είναι θετικά ορισμένος $\forall x$, άρα κ' για $x = y^{n+1}$.

$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \leq (y^n, y^{n+1}) \leq \|y^n\| \, \|y^{n+1}\|$
λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwarz για το εσωτερικό γινόμενο κ' $\|y^{n+1}\| \geq 0$.

Άρα, $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$.

Συνεπώς, η νόρμα των προσεγγίσεων φθίνει.

Άσκηση: Να δείξετε το ίδιο για την μέθοδο του

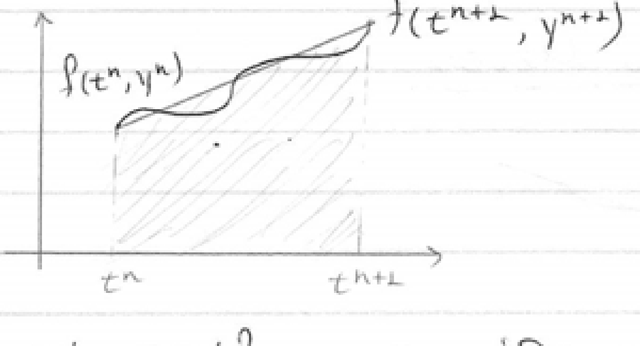
744

τραπεζίου.

Άλλες μέθοδοι χαμηλής τάξης

Μέθοδος τραπεζίου: $\begin{cases} y^{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

1) Πεπλεγμένη μέθοδος
2) Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι 2.
Δηλ. ισχύει ότι $\max\limits_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le Ch^p$, $p=2$ μέγιστος εκθέτης κ' y, f ομαλές (λείες) συναρτήσεις (smooth functions).
3) Τρόπος κατασκευής: με αριθμητική ολοκλήρωση



Περιοχή απόλυτης ευστάθειας

Έστω το Π.Α.Τ: $\begin{cases} y' = \lambda y, & t \in [0, +\infty) \\ y(0) = 1, & \lambda \in \mathbb{C}, \ Re(\lambda) < 0 \end{cases}$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[\lambda y^n + \lambda y^{n+1}\right] \Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y^{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y^n \Rightarrow$$

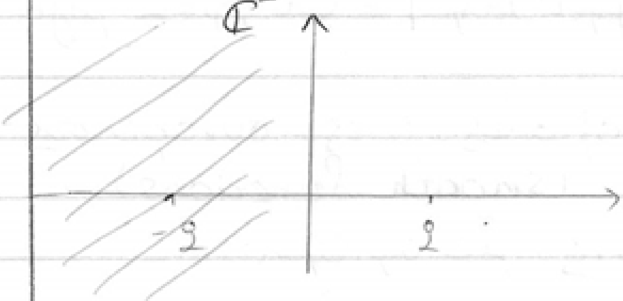
$$\Rightarrow y^{n+1} = \frac{\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right)} y^n, \quad \text{θέτω } r(\lambda h) = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}$$

$$y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n, \quad r(\lambda h) = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}$$

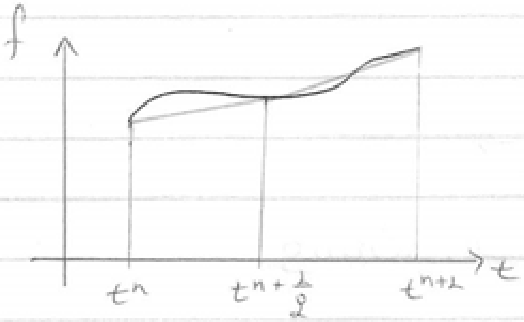
Άρα, $S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| < 1 \}$, όπου $z = \lambda h$

(διότι η αναλυτική λύση του Π.Α.Τ. είναι φθίνουσα: $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda < 0$)

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq |z-2| \} = \mathbb{C}^-$$



Μέθοδος του Μέσου



Το $t^{n+\frac{1}{2}}$ είναι εικονικό βήμα το οποίο δεν υπάρχει στην διακριτοποίηση, $t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + \frac{h}{2}$

$$y^{n+1} = y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\right), \quad y\text{: γραμμική}$$

$$\left.\begin{aligned} t^n &\rightsquigarrow y^n \\ t^{n+1} &\rightsquigarrow y^{n+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow t^{n+\frac{1}{2}} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\left(y^n + y^{n+1}\right)$$

(744)

1) Πεπλεγμένη μέθοδος
2) Η μέθοδος του μέσου για την Δ.Ε.: $y'=\lambda y$, $\lambda\in\mathbb{C}$
συμπίπτει με την μέθοδο του τραπεζίου.
3) Περιοχή απόλυτης ευστάθειας: $S=\mathbb{C}^-$

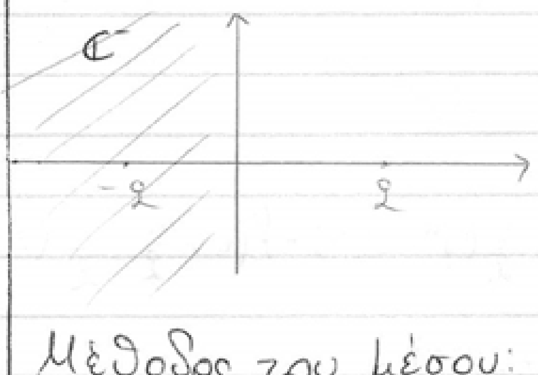
Η μέθοδος του μέσου είναι <u>B-ευσταθής</u>, δηλ.
1) Ισχύει η μονόπλευρη Lipschitz για την f.
2) η ακολουθία που δημιουργείται είναι φθίνουσα, $\|y^{n+1}-z^{n+1}\|\le\|y^n-z^n\|$, $n=0,1,2,\dots$

Δευτέρα 5/12/2016

<u>Επανάληψη:</u>

<u>Μέθοδος Τραπεζίου:</u> $\begin{cases} y^{n+1}=y^n+\frac{h}{2}\left[f(t^n,y^n)+f(t^{n+1},y^{n+1})\right] \\ y^0=y_0 \end{cases}$

1) Πεπλεγμένη μέθοδος
2) Τάξη ακρίβειας: 2
3) Τρόπος κατασκευής με ολοκλήρωμα
4) Περιοχή απόλυτης ευστάθειας:
$S=\{z\in\mathbb{C}: |z+2|\le|z-2|\}=\mathbb{C}^-$.



<u>Μέθοδος του μέσου:</u>
$\begin{cases} y^{n+1}=y^n+hf\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{1}{2}(y^n,y^{n+1})\right), \quad n=0,1,2,\dots \\ y^0=y_0 \end{cases}$

1) Πεπλεγμένη μέθοδος
2) Η μέθοδος του μέσου συμπίπτει με την μέθοδο τραπεζίου για το πρόβλημα δοκιμής ($y'=\lambda y$).
3) Περιοχή απόλυτης ευστάθειας: $S=\mathbb{C}^-$

<u>Ορισμός</u>: Μία αριθμητική μέθοδος λέγεται Β-ευσταθής όταν:
1) ισχύει η μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz:
$\forall t\in[a,b],\ \forall y_1, y_2\in\mathbb{R}: \left(f(t,y_1)-f(t,y_2),\ y_1-y_2\right)\le 0$
2) τότε η ακολουθία που δημιουργείται είναι φθίνουσα: $\|y^{n+1}-z^{n+1}\|\le\|y^n-z^n\|,\ n=0,1,2,\dots$

<u>Άσκηση</u>: Ν.Δ.Ο. η μέθοδος του μέσου είναι Β-ευσταθής.

<u>Απόδειξη</u>
Έστω τα διακριτά Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y^{n+1}=y^n+hf\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})\right) \\ y^0=y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{n+1}=z^n+hf\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{1}{2}(z^n+z^{n+1})\right) \\ z^0=z_0 \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη:

$$y^{n+1}-z^{n+1}=(y^n-z^n)+h\left[f\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{1}{2}(y^n+y^{n-1})\right)-f\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{1}{2}(z^n+z^{n+1})\right)\right]$$

Ισχύει: $\frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})-\frac{1}{2}(z^n+z^{n+1})=$

$$=\frac{1}{2}y^{n+1}-\frac{1}{2}z^{n+1}+\frac{1}{2}y^n-\frac{1}{2}z^n=$$

$$= \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)$$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\left(y^{n+1} - z^{n+1}, \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)\right) \leq$$

$$\leq \left(y^n - z^n, \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}, y^n - z^n) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|y^n - z^n\|^2 + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}, y^n - z^n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|y^n - z^n\|^2$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$$

Άρα, η ακολουθία $y^n - z^n$ είναι φθίνουσα (2)

Για ν.α.ο. η μέθοδος του μέσου είναι B-ευσταθής, πρέπει να δείξουμε επιπλέον ότι πληροί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz (1).

(Εξ ορισμού απαιτούνται οι υποθέσεις (1) ξ' (2))

744

3ο Κεφάλαιο: Μέθοδοι Runge-Kutta (RK)

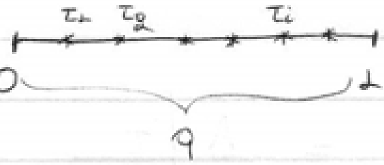
Συμβολισμοί & παραδείγματα

Οι μέθοδοι RK ανήκουν στην κατηγορία των μονοβηματικών μεθόδων, δηλ. για τον υπολογισμό της προσέγγισης y^{n+1} απαιτείται μόνο η αμέσως προηγούμενη τιμή y^n.

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.(1): $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

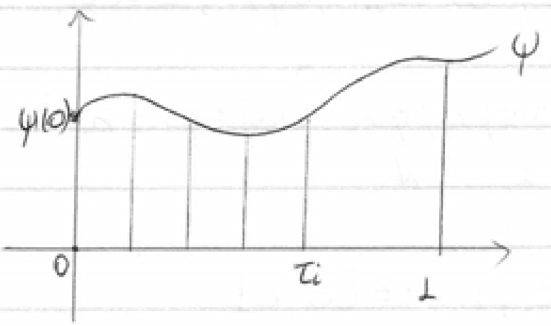
Η λύση του Π.Α.Τ.(1) είναι η συνάρτηση $y:[a,b]\to\mathbb{R}$

Παρατήρηση: Για $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



Προσεγγίζω το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\tau_i} \varphi(s)\,ds \cong \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\,\varphi(\tau_j), \quad i=1,2,\dots,q, \; a_{ij}\in\mathbb{R}, \; q\in\mathbb{N}, \; \tau_i\in\mathbb{R}$$



ς το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \psi(s)ds \cong \sum_{i=1}^{n} b_i \psi(\tau_i)$, $i=1,2,\dots,q$, $b_j \in R$.

Οι σταθερές a_{ij}, b_i, τ_i, ορίζουν q+1 τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης.
Τα τ_i είναι οι κόμβοι της εσωτερικής διαμέρισης.
Τα b_i είναι τα βάρη στον τύπο προσέγγισης στο $[0,1]$.
Τα a_{ij} είναι τα βάρη στον τύπο προσέγγισης του ολοκληρώματος στο $[0,\tau_i]$.

Κάθε ένα σύνολο τέτοιων σταθερών ορίζει μια μέθοδο RK.

Μέθοδος RK σε μορφή μητρώου (J. Butcher)
(πίνακας ≡ μήτρο)

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

όπου $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{q,q}$, $b=(b_1,\dots,b_q)^T$, $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_q)^T$

Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση: $h=\frac{b-a}{N}$
$t^n = a+nh$, $n=0,1,2,\dots,N$.

Π.Α.Τ.(1): $\begin{cases} y'=f(t,y), & t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

744

Συμβολίζουμε με y^n τις προσεγγίσεις της λύσης του Π.Α.Τ. (1) στα σημεία $t^n, n=1,2,\dots$ που παράγει η μέθοδος RK.

Οι ενδιάμεσοι κόμβοι είναι: $t^{n,i}=t^n+\tau_i h, i=1,2,\dots,q$

t^n $t^{n,i}$ t^{n+1}

Ολοκληρώνουμε τα 2 μέλη της εξίσωσης (1) από t^n έως $t^{n,i}$ κ' έχουμε:

$$\int_{t^n}^{t^{n,i}} y'(s)ds = y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^n+\tau_i h} f(t,y(t)) \Longrightarrow$$

$$\xRightarrow{t=t^n+hs} y(t^{n,i}) - y(t^n) = h\int_0^{\tau_i} f(t^n+hs, y(t^n+hs))\,ds$$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) \cong y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^n+h\tau_j, y(t^n+h\tau_j))$$

ολοκλήρωμα Riemann (ΑΠ ΙΙ)

$$\Rightarrow \boxed{y(t^{n,i}) \cong y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,i}, y(t^{n,j}))}$$

Άρα, οι προσεγγίσεις $y^{n,i}$ των τιμών $y(t^{n,i})$ ικανοποιούν τη σχέση: $y^{n,i}=y^n+h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j},y^{n,j})$, $i=1,2,\dots,q$.

(Με ενδιαφέρει να υπολογίσω το y^{n+1} τα υπόλοιπα ενδιάμεσα σημεία τα απαιτεί η μέθοδος.)

Ολοκληρώνουμε την Δ.Ε. (1) στο διάστημα $[t^n, t^{n+1}]$, εφαρμόζουμε τον κανόνα αλλαγής μεταβλητής: $t = t^n + hs$ κ' προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν στο διάστημα $[0,1]$, με κόμβους τ_i κ' βάρη b_i: $y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$

(Για μια μέθοδο RK $4^{ης}$ τάξης έχω περισσότερους συναρτησιακούς υπολογισμούς από την μέθοδο Euler, αλλά έχω μεγαλύτερη τάξη ακρίβειας, δηλ. αν $h=0.1$ τότε η ακρίβεια της RK $4^{ης}$ τάξης είναι: $h^4 = 0.1^4$).

Διακριτό Π.Α.Τ. με (3): μία RK.

$$\left\{\begin{array}{l} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f(t^{n,i}, y^{n,i}) \\ \vdots \\ y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{n} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{array}\right\} n=0,1,\dots,N-1$$

<u>Παρατήρηση</u>: Τα $y^{n,i}$ ονομάζονται ενδιάμεσα στάδια.

1) Αν ο πίνακας A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός, δηλ. $a_{ij} = 0, \forall j \geq i$, τότε η μέθοδος RK ονομάζεται άμεση RK, τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά.

$$(4): \begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n,3} = y^n + h\left(a_{31} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + a_{32} f(t^{n,2}, y^{n,2})\right) \\ \vdots \\ y^{n,q} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \end{cases}$$

2) Αν ο A δεν είναι γνήσια κάτω τριγωνικός

744

τότε οι μέθοδοι που προκύπτουν είναι πεπλεγμένες ($Ay=b$).

$\psi = Ay - b = 0$: εξίσωση σφάλματος (Gradient method)

Μέθοδος Newton: $\bar{y}^{n+1} = \bar{y}^{n} - \frac{\bar{F}}{J}$

όπου J η ιακωβιανή ορίζουσα του συστήματος

Παραδείγματα μεθόδων RK

Παράδειγμα 1: $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$, $q=1$

Είναι το μητρώο της άμεσης μεθόδου Euler.

Έχουμε: $t^{n,1} = t^n + \tau_1 h \Rightarrow t^{n,1} = t^n + 0h \Rightarrow t^{n,1} = t^n$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{cases}$$

Άρα, $y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$

Παράδειγμα 2: $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$, $q=1$

Έχουμε: $t^{n,1} = t^n + \tau_1 h = t^n + 1h = t^n + h = t^{n+1}$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n,1}) \end{cases},$$

για h αρκετά μικρό ($h \ll 1$) η συνάρτηση

$g(x) = y^n + hf(t^{n+1}, x)$ είναι συστολή στο $\mathbb{R}$ (απόδειξη Θ. Brower) τότε η πρώτη εξίσωση έχει μοναδική λύση (Θ. σταθερού σημείου) το $y^{n,1}$.

Τα δεύτερα μέλη των 2 εξισώσεων είναι ίσα, άρα κ' $y^{n+1} = y^{n,1}$.

Συνεπώς, $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$ κ' πρόκειται για την πεπλεγμένη Euler.

Παράδειγμα 3: $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$, $q=1$, περιγράφει την μέθοδο του μέσου

Έχουμε: $t^{n,1} = t^n + \frac{h}{2} = t^{n+\frac{1}{2}}$

$$y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \quad (1)$$

$$y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,1}\right) \quad (2)$$

$$(2): f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,1}\right) = \frac{y^{n+1} - y^n}{h} \overset{(1)}{\Longrightarrow} 2\,\frac{y^{n,1} - y^n}{h} = \frac{y^{n+1} - y^n}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{n,1} = \frac{y^{n+1} + y^n}{2} \quad (3)$$

$$(2) \overset{(3)}{\Longrightarrow} y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^{n+1} + y^n)\right)$$

Παρατήρηση: Η $g(x) = y^n + hf(t^{n+\frac{1}{2}}, x)$ είναι συστολή, άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση

744

στην $y^{n,1}$.

Παράδειγμα 4: $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$, $q=2$.

μέθοδος του τραπεζίου (πεπλεγμένη μέθοδος RK, διότι ο A δεν είναι γνήσια κάτω τριγωνικός)

$$y^{n,1} = y^n$$
$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2})\right]$$
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2})\right]$$

αφού το $y^{n,1} = y^n$ κ' επίσης $y^{n+1} = y^{n,2}$,

τελικά έχουμε ότι: $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$

δηλ. η μέθοδος του τραπεζίου (Ακρίβεια: 2ης τάξης).

Δευτέρα 12/12/2016

Επανάληψη:

$$\begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h\sum a_{ij} f(t^{n,i}, y^{n,i}), \ 1 \le i \le q \\ y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

Μέθοδοι R-K

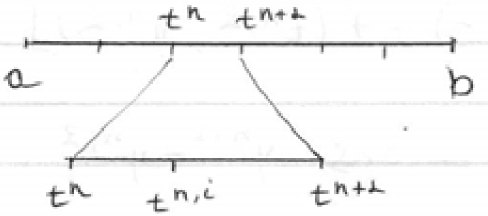
→ Άμεσες
(γνήσια κάτω τριγωνικός πίνακας, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{q,q}$)

→ Πεπλεγμένες

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{11} & 0 & & \\ a_{12} & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

μορφή μητρώου: $\begin{array}{c|c} A & \tau^n \\ \hline b & \end{array}$

$\tau^T = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q) \in \mathbb{R}^q$
$b^T = (b_1, b_2, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^q$



Παράδειγμα 5: $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$, $q=2$.

Το μητρώο περιγράφει τη βελτιωμένη μέθοδο του Euler.

Έχουμε: $t^{n,1} = t^n$ κ' $t^{n,2} = t^n + \frac{h}{2}$

$$y^{n,1} = y^n$$
$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1})$$

Άρα, τελικά: $\begin{cases} y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n) \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,1}) \end{cases}$

η βελτιωμένη Euler, με τάξη ακρίβειας 2.

Παράδειγμα 6:
$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}, \quad q=2,$$

το δοθέν μητρώο δίνει μια οικογένεια ημιπεπλεγμένης μεθόδου RK, $\mu \in \mathbb{R} / \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ η μέθοδος είναι τάξη ακρίβειας 2, ενώ για $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ η μέθοδος είναι τάξη

ακρίβειας 3.

Παράδειγμα 7:
$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}, \quad q=4$$

Το δοθέν μητρώο δίνει την κλασική μέθοδο RK $4^{\underline{ης}}$ τάξης.

Έχουμε: $t^n \;\text{———}\; t^{n+1}$, $\quad t^n + \frac{h}{2} = t^{n+\frac{1}{2}}$

$$t^{n,1} = t^n, \quad t^{n,2} = t^n + \frac{h}{2}, \quad t^{n,3} = t^n + \frac{h}{2}, \quad t^{n,4} = t^n + h = t^{n+1}.$$

$$y^{n,1} = y^n$$
$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) = y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)$$
$$y^{n,3} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) = y^n + \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,2}\right)$$
$$y^{n,4} = y^n + h f(t^{n,3}, y^{n,3}) = y^n + h f\left(t^{n+\frac{1}{2}}, y^{n,3}\right)$$

$$y^{n+1} = y^n + h\Big[\frac{1}{6} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{1}{3} f(t^{n,2}, y^{n,2}) +$$
$$+ \frac{1}{3} f(t^{n,3}, y^{n,3}) + \frac{1}{6} f(t^{n,4}, y^{n,4})\Big] + O(h^3)$$

Επιλυσιμότητα των μεθόδων RK

1) Στην περίπτωση άμεσων μεθόδων RK τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά οπότε είναι καλώς ορισμένα, άρα μονοσήμαντα ορισμένα.

2) Το πρόβλημα είναι στις πεπλεγμένες RK, το σύστημα λύνεται μονοσήμαντα τουλάχιστον για μικρό h;

Πρόταση: Έστω το Π.Α.Τ. (1).
(Ύπαρξη κ' μοναδικότητα των προσεγγίσεων που προκύπτουν από τις μεθόδους RK)
Για την f, ισχύει η συνθήκη Lipschitz,
$\exists\, L \geq 0,\ \forall\, t \in [a,b],\ \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,
$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$
κ' έστω ότι $h < \frac{1}{\gamma}$, με $\gamma = L \max\limits_{1\leq i\leq q} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$

τότε το σύστημα: $y^{n,i} = y^n + h\sum\limits_j a_{ij} f(t^{n,i}, y^{n,i})$ (2)
$i = 1, \dots, q$

λύνεται μονοσήμαντα ως προς το $y^{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, q$.

Σημείωση για την Απόδειξη

Θεωρούμε την απεικόνιση, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
με $f_i(x) = y^n + h\sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,i}, x)$, $1 \leq i \leq q$.

όπου $x=(x_1, x_2, \dots, x_q)^T$
$f(x)=(f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))^T$
αρκεί ν.δ.ο. για $h<\frac{1}{\gamma}$ η f έχει ακριβώς

ένα σταθερό σημείο δηλ. αρκεί ν.δ.ο
η f είναι συστολή.
(κ' τότε το σταθερό σημείο θα είναι τα $y^{n,i}$, $1\le i\le q$).

Παρατήρηση:
1) Το "γενικό" μη γραμμικό σύστημα (2) έχει μοναδική λύση, έστω για μικρό $h<\frac{1}{\gamma}$
2) Όταν η σταθερά Lipschitz L, είναι μεγάλη τότε αυτό συνιστά σοβαρό περιορισμό του h.
3) Η λύση $(y^{n,i})=y^n\in\mathbb{R}^2$ του μη γραμμικού συστήματος μπορεί να υπολογιστεί:
i) με τη βοήθεια μίας επαναληπτικής μεθόδου $y^n_{(\ell+1)}=f(y^n_{(\ell)})$, $\ell=0,1,2,\dots$
2) είτε με την μέθοδο του Νεύτωνα ή κάποια παραλλαγή της.

(*) Μέθοδος του Νεύτωνα: Για μία διάσταση, αν έχουμε μία αρχική προσέγγιση, π.χ. x_0 τότε μία επανάληψη της αρχικής μεθόδου, θα μας δώσει μία νέα προσέγγιση:

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

Η μέθοδος γραμμικοποιεί το πρόβλημα, προσεγγίζει τη λύση μέσω της επίλυσης γραμμικών συστημάτων. (σελ. 60-61 βιβλίου)

(*) Για διάνυσμα $\bar{x}$, η μέθοδος γράφεται ως:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \frac{\bar{g}(\bar{x}_0)}{J(x_0)}, \quad J_{ij}(x) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar{x}), \quad i,j = 1,2,\dots,q.$$

ο ιακωβιανός πίνακας.

<u>Ευστάθεια των μεθόδων R-K</u>

Έστω μία μέθοδος RK κ' $y^0, y^1, \dots, y^n$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος,

$$(1): \begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_j a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad 1 \le i \le q \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_i b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} z^0 = z_0 \\ z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + \rho^n \end{cases}$$

$n = 0, 1, \dots, N$, $\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^N$ δεδομένα αριθμοί

τότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 ανεξάρτητες του βήματος h τ.ω.

$$(3): \max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le c_2 |y^0 - z^0| + \frac{c_2}{h} \max_{0 \le n \le N-1} |\rho^n|$$

<u>Απόδειξη:</u>

Αφαιρώντας κατά μέλη τις ενδιάμεσες σχέσεις των (1), (2) κ' χρησιμοποιώντας την ολική συνθήκη Lipschitz λαμβάνουμε:

(744)

$$|y^{n,i}-z^{n,i}| \le |y^n-z^n| + hL\sum_{j=1}^{q}|a_{ij}|\,|y^{n,j}-z^{n,j}|$$

$$\le |y^n-z^n| + hL\max_{1\le i\le q}\sum_{j=1}^{q}|a_{ij}| \max_{1\le j\le q}|y^{n,j}-z^{n,j}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i}-z^{n,i}| \le |y^n-z^n| + h\gamma \max_{1\le i\le q}|y^{n,i}-z^{n,i}|$$

$$\Rightarrow \max_{1\le i\le q}|y^{n,i}-z^{n,i}| \le \frac{1}{1-h\gamma}|y^n-z^n|$$, αφού ισχύει

για όλα τα $1\le i\le q$.

Άρα, για $h<h_0<\frac{1}{\gamma}$ υπάρχει σταθερά C η οποία είναι ανεξάρτητη του h τ.ω.

$$\max|y^{n,i}-z^{n,i}| \le C|y^n-z^n| \quad (4)$$

όπου $C=\frac{1}{1-h\gamma}$, $i=1,2,\dots,q$, $n=0,1,2,\dots$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες σχέσεις στις (1), (2) κ' χρησιμοποιώντας την ολική συνθήκη Lipschitz, έχουμε:

$$|y^{n+1}-z^{n+1}| \le |y^n-z^n| + hL\sum_{i=1}^{q}|b_i|\,|y^{n,i}-z^{n,i}| + |\rho^n|$$

όπου από την (4) δίνει:

$$|y^{n+1}-z^{n+1}| \le \left(1+hLC\sum_{i=1}^{q}|b_i|\right)|y^n-z^n| + |\rho^n|$$

Από γνωστό λήμμα του 2ου κεφαλαίου κ' θέτοντας $c=LC\sum|b_i|$, τελικά προκύπτει ότι: (6) $\max_{1\le n\le N}|y^n-z^n| \le e^{c(b-a)}|y^0-z^0| + \frac{e^{c(b-a)}-1}{ch}\max_{0\le n\le N-1}|\rho^n|$

Για $\rho^n=0$, από την (6) συνεπάγεται η συνθήκη ευστάθειας RK.

(7): $\max_n |y^n - z^n| \le e^{c'(b-a)} |y^0 - z^0|$, $c' = Lc\sum_i |b_i|$
(συνθήκη ευστάθειας).
ανεξάρτητη του βήματος h.

<u>Λήμμα</u>: Έστω $\delta > 0$ κ' $k, d_0, d_1, \dots \ge 0$ τέτοια ώστε $d_{i+1} \le (1+\delta) d_i + k$, $i = 0, 1, 2, \dots$ τότε ισχύει: $d_n \le d_0 e^{n\delta} + k \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$, $n = 0, 1, \dots$

<u>Σφάλμα συνέπειας RK (τοπικό σφάλμα).</u>

$\zeta^{n,i} = y(t^n) + h \sum_j a_{ij} f(t^{n,j}, \zeta^{n,j})$, $i = 1, \dots, q$.

Τα $\zeta^{n,i}$ είναι καλά ορισμένα όταν το $h < \frac{1}{\gamma} \Rightarrow h\gamma < 1$

τότε $\delta^n = \left[y(t^n) + h \sum_i b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \right] - y(t^{n+1})$

το δ^n ονομάζεται τοπικό σφάλμα ή σφάλμα συνέπειας

<u>Τάξη Ακριβείας ή Τάξη της μεθόδου RK</u>

Ονομάζεται ο μεγαλύτερος εκθέτης p, για τον οποίο υπάρχει σταθερά $\tilde{c}$ που εξαρτάται από το y κ' την f αλλά είναι ανεξάρτητη του βήματος h, τ.ω.
$\max_n |\delta^n| \le \tilde{c} h^{p+1}$ (8)

(Η RK $4^{\text{ης}}$ τάξης έχει σφάλμα $5^{\text{ης}}$ τάξης.)

(744)

Θεώρημα: (Εκτίμηση σφάλματος)
Έστω ότι ισχύει η συνθήκη Lipschitz για την f κ' οι f κ' y είναι αρκετά ομαλές κ' η τάξη της μεθόδου p, δηλ. ισχύει η σχέση (8), τότε έχουμε την εκτίμηση σφάλματος: $\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{\tau}{c'}\left[e^{c'(b-a)} - 1\right] h^p$

όπου τ κ' $c' = Lc\sum_i |b_i|$ είναι σταθερές

ανεξάρτητες του βήματος h.

Δευτέρα 19/12/2016

Επανάληψη:

Πρόταση (Ύπαρξη κ' μοναδικότητα προσεγγίσεων): Θεωρούμε το Π.Α.Τ. $\begin{cases} y' = f(t,y), & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$
Έστω ότι η f πληροί την ολική συνθήκη Lipschitz, δηλ. $\exists\, L\geq 0$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $\forall t\in[a,b]$: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$ κ' έστω ότι $h < \frac{1}{\gamma}$, $\gamma = L\max_{1\le i\le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$.

Τότε το σύστημα $y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$, $i=1,\dots,q$.

λύνεται μονοσήμαντα ως προς τα $y^{n,i}$, $i=1,\dots,q$.

Ευστάθεια των μεθόδων R-K
Έστω μία μέθοδος RK κ' $y^0, y^1, \dots, y^n$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος

(1): $\begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_j a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \ 1 \le j \le q \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_i b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$

(2): $\begin{cases} z^0 = z_0 \\ z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}), \ i = 1, \dots, q \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + \rho^n \end{cases}$

$n = 0, 1, \dots, N$, $\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^N$: δεδομένοι αριθμοί

τότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 : ανεξάρτητες του βήματος h τ.ω.

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le c_2 |y^0 - z^0| + \frac{c_2}{h} \max_{0 \le n \le N-1} |\rho^n|$$

<u>Θεώρημα (Εκτίμηση σφάλματος μεθόδου RK)</u>: Έστω ότι ισχύει η συνθήκη Lipschitz για την f κ' οι y κ' f είναι αρκετά ομαλές συναρτήσεις. Θεωρούμε την μέθοδο R-K κ' υποθέτουμε ότι ισχύει:

(1) $\max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \tilde{c}\, h^{p+1}$, τάξη ακριβείας της R-K, τότε (2): $\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{\tilde{c}}{c'} \left[e^{c'(b-a)} - 1 \right] h^p$,

όπου οι σταθερές $\tilde{c}$, c' είναι ανεξάρτητες του h, $c' = Lc \sum_i |b_i|$.

<u>Απόδειξη:</u>

Γράφουμε ότι:

$$\zeta^{n,i} = y(t^n) + h \sum_j a_{ij} f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}), \ 1 \le i \le q.$$

(744)

$$\delta^n = y^{n+1} - y(t^{n+1}) = \left[y(t^n) + h\sum_i b_i f(t^{n,i}, \zeta^{n,i})\right] - y(t^{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = \left[y(t^n) + h\sum_i b_i f(t^{n,i}, \zeta^{n,i})\right] - \delta^n$$

Από προηγούμενη πρόταση (ευστάθεια της RK) αν $\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^{N-1}$, δοσμένοι αριθμοί, τότε $\exists\, c_1, c_2$, ανεξάρτητα του h, τ.ω.
$\max_n |y^n - z^n| \le c_1 |y^0 - z^0| + \frac{c_2}{h} \max_n |\rho^n|$ (*)

Από (*): $\max_n |y(t^n) - y^n| \le c_1 \underbrace{|y(a) - y_0|}_{=0} + \frac{c_2}{h} \max_h |\delta^n|$

<u>Παρατήρηση</u>: Όπου ρ^n εδώ είναι το τοπικό σφάλμα της μεθόδου RK σε κάθε βήμα.

Άρα, $\max_n |y(t^n) - y^n| \le \frac{c_2}{h} \max_n |\delta^n| \le \frac{c_2}{h} \tau h^{p+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \max_n |y(t^n) - y^n| \le c_2 \tau h^p$.

όπου $c_2 = \frac{e^{c'(b-a)} - 1}{c'}$, $c' = Lc \sum_i |b_i|$

<u>Άσκηση</u>: Αν μια μέθοδος RK είναι τάξης ακριβείας $p \ge 1 \Leftrightarrow b_1 + b_2 + \dots + b_q = 1$, τότε η RK λέγεται συνεπής.

<u>Λύση</u>
Γράφουμε ότι: $\delta^n = \left[y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \zeta^{n,i})\right] - y(t^{n+1}) =$
$= y^{n+1} - y(t^{n+1})$

$t^n \quad t^{n,i} \quad t^{n+1}$, $\quad f(t^{n,i}, \zeta^{n,i}) = f(t^n, y(t^n)) + O(h)$

Θέλω ν.δ.ο. $\delta^n = O(h^2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2} b_i = 1$

Άρα, $\delta^n = y(t^n) + h\sum_i b_i \left[f(t^n, y(t^n)) + O(h)\right]$ $\underline{\underline{\text{Taylor}}}$

$= y(t^n) + h\sum_i b_i f(t^n, y(t^n)) + h\sum_i b_i O(h) - y(t^{n+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta^n = y(t^n) + h\sum_i b_i y'(t^n) + O(h^2) - \left[y(t^n) + hy'(t^n) + O(h^2)\right] =$

$= hy'(t^n)\left(\sum_{i=1}^{2} b_i - 1\right) + O(h^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta^n = hy'(t^n)\left(\sum_i b_i - 1\right) + O(h^2)$

$y' \neq 0, \forall t$, άρα πρέπει το $\sum_i b_i - 1 = 0 \Rightarrow \sum b_i = 1$

Αλλιώς, το τοπικό σφάλμα θα ήταν τάξης 1 ($O(h)$) κ' όχι τάξης 2 ($O(h^2)$) που έχουμε την αρχική υπόθεση, άρα η RK είναι συνεπής.

Άσκηση 2 (3.2 βιβλίου): Ν.δ.ο. η μέθοδος RK που περιγράφεται από το μητρώο

$$\begin{array}{c|c} 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

έχει τάξη ακριβώς ένα ($p=1$).

Λύση

Το $b_i = 1$, άρα η τάξη της μεθόδου RK είναι $p \geq 1$.

(744)

$$RK\begin{cases} \xi^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{3} f(t^n + \frac{h}{3}, \xi^{n,1}) \\ \delta^n = \underbrace{\left[y(t^n) + h f(t^n + \frac{h}{3}, \xi^{n,1}) \right]}_{= y^{n+1}} - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι: $\xi^{n,1} = y(t^n) + O(h) \Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{Taylor}} f(t^n + \frac{h}{3}, \xi^{n,1}) = f(t^n, y(t^n)) + O(h)$ (1)

Άρα, εφαρμόζοντας το Taylor έχουμε:

$\delta^n \overset{(1)}{=} y(t^n) + h\left[f(t^n, y(t^n)) + O(h) \right] - y(t^{n+1}) \Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{Taylor}} \delta^n = y(t^n) + h y'(t^n) + O(h^2) - \left[y(t^n) + h y'(t^n) + O(h^2) \right]$

$\Rightarrow \delta^n = O(h^2)$, άρα η RK είναι τάξης ακρίβειας $p \geq 1$ (δηλ. 1 ή 2). (2)

Για ν.δ.ο. η τάξη δεν είναι μεγαλύτερη του 1, θα θεωρήσουμε ένα απλό παράδειγμα: $\begin{cases} y'(t) = 2t, \ 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(Επιλέγω συνάρτηση τάξης ίδιας με αυτής της ακρίβειας).

Η αναλυτική λύση: $y(t) = t^2$

Τότε, $\delta^n = y(t^n) + h f(t^n + \frac{h}{3}) - y(t^{n+1}) =$

$= (t^n)^2 + h2(t^n + \frac{h}{3}) - (t^n + h)^2$

$= (t^n)^2 + 2ht^n + \frac{2}{3}h^2 - (t^n)^2 - 2ht^n - h^2$

$= -\frac{1}{3}h^2.$

Άρα, $|\delta^n| \le \frac{1}{3}h^2$, συνεπώς η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι το πολύ ένα ($p \le 1$) ②

Άρα, από ② κ' ③ έχουμε ότι $p=1$, δηλ. ακριβώς 1.

Υπάρχουν ανάλογα παραδείγματα για μελέτη κ' στο βιβλίο στις σελ. 112-118.

Άσκηση (για το σπίτι): Η πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου με μητρώο $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$, έχει τάξη ακρίβειας 2. ($p=2$).

Θεωρείστε το π.χ. $\begin{cases} y'(t) = 3t^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$, με αναλυτική λύση: $y(t)=t^3$.

Παρατήρηση για το ανάπτυγμα Taylor που θα χρησιμοποιήσουμε:

$$y^{n+1} = y^n + h(y^n)' + \frac{h^2}{2}(y^n)'' + \dots$$

για τα προβλήματα που δουλεύουμε:

$$y' = f(t,y), \quad (y^n)' = f(t^n, y(t^n))$$

$$(y^n)'' = \left(f(t^n, y(t^n))\right)' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = f_t + f_y f.$$

κανόνας της αλυσίδας.

(744)

Περιοχή απόλυτης ευστάθειας

Θεωρούμε το πρόβλημα δοκιμής:

$$(*):\begin{cases} y' = \lambda y, \ t \geq 0 \\ y(0) = 1, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ Re(\lambda) < 0 \end{cases}$$

αναλυτική λύση: $y(t) = e^{\lambda t}$ (φθίνουσα συμπεριφορά της λύσης).

Έστω μία μέθοδος RK με μητρώο $\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$, h: θετικό βήμα.

Για το (*) η μέθοδος RK είναι:

$$\begin{cases} y^{n,i} = y^n + \lambda h \sum_j a_{ij} y^{n,j} \quad (1) \\ y^{n+1} = y^n + \lambda h \sum_i b_i y^{n,i} \quad (2) \end{cases}, \ 1 \leq i \leq q, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Γράφουμε την (1) ως:

$$I_q \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} + \lambda h A \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

<u>Παρατήρηση</u>: I_q: ο μοναδιαίος $q \times q$ πίνακας, A: $q \times q$ πίνακας των a_{ij}.

$$\Leftrightarrow (I_q - \lambda h A)\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

[$B = (I_q - \lambda h A) \in \mathbb{C}^{q\times q}$ έχω να λύσω το σύστημα της μορφής: $By = c \Rightarrow B^{-1}By = B^{-1}c \Rightarrow$
$\Rightarrow y = B^{-1}C$].

Αν ο $(I_q - \lambda h A)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε:

$$\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,n} \end{pmatrix} = (I_q - \lambda h A)^{-1}\begin{pmatrix} y^n \\ y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = (I_q - \lambda h A)^{-1} y^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,n} \end{pmatrix} = (I_q - \lambda h A)^{-1} y^n \bar{e} \quad (3), \quad \bar{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$$

Η (2) μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$y^{n+1} = y^n + \lambda h \sum_i b_i y^{n,i} = y^n + \lambda h b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$= y^n + \lambda h b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} y^n \bar{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = [1 + \lambda h b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} \bar{e}] y^n := r(\lambda h) y^n$$

<u>Παρατήρηση</u>: για την Euler έχουμε: $y^{n+1}=(\lambda h+1)y^n$ εξαρτάται από το λh, όμοια κ' για παραπάνω.

$$\Rightarrow \begin{cases} r(z)=1+zb^T(I_q-zA^{-1})\bar{e} \\ y^{n+1}=r(\lambda h)y^n \end{cases}$$

Θέτουμε $\bar{\omega}=(I_q-zA)^{-1}\bar{e} \Rightarrow (I_q-zA)\bar{\omega}=\bar{e}\in\mathbb{R}^q$

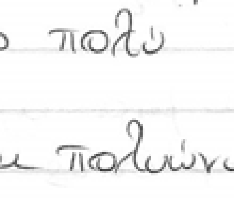
Γραμμικό σύστημα, q-εξισώσεων, με q αγνώστους.
της μορφής $B\bar{\omega}=\bar{e}$, $B\in\mathbb{C}^{q\times q}$ το οποίο δεν περιέχει κάποιο ω_i, $i=1,2,\dots,q$.

Όταν λύσω το γραμμικό σύστημα στον παρονομαστή θα έχουμε την $\det(I_q-zA)\neq 0$, που είναι πολυώνυμο του z το πολύ q-βαθμού.
Όμοια κ' οι αριθμητές θα είναι πολυώνυμα το πολύ βαθμού $q-1$.

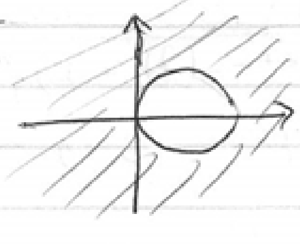
<u>Συμπέρασμα</u>: Άρα, η $r(z)$ είναι μία ρητή συνάρτηση κ' ο βαθμός αριθμητή κ' παρονομαστή είναι το πολύ q.

<u>Παρατήρηση</u>: Συναρτήσεις ευστάθειας

<u>Euler</u>: $r(z)=1+z$, $S=\{z\in\mathbb{C}: |1+z|\le 1\}$



πεπλεγμένη Euler: $r(z) = \frac{1}{1-z}$



$S = \{ z \in \mathbb{C} : |1-z| \geq 1 \}$

πεπλεγμένη μέθοδος του τραπεζίου: $r(z) = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2+z}{2-z}$,

$S = \{ z \in \mathbb{C} : |2+z| \leq |2-z| \} = \mathbb{C}^-$

Άμεσες μέθοδοι RK: Ο A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός, στη διαγώνιο έχω μονάδες άρα η ορίζουσα $\det(I_q - zA) = 1$, τότε σ' αυτήν την περίπτωση, $r \in \mathbb{R}^q$ κ' η περιοχή απόλυτης ευστάθειας:
$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$

Για μία άμεση μέθοδο RK, με τάξη ακρίβειας p, ισχύει ότι:
$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + c_{p+1} z^{p+1} + \dots + c_q z^q$.

Αν η RK έχει q εσωτερικά στάδια, τότε r(z) είναι της παραπάνω μορφής, όμως επειδή η ακρίβεια της RK είναι $p < q$, οπότε: $c_{p+1} z^{p+1} + \dots + c_q z^p = 0$.

Άρα, το $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^p}{p!}$, δηλ. το

r είναι πολυώνυμο Taylor βαθμού p της εκθετικής συνάρτησης e^z στην περιοχή το μηδενός $(z=0)$.

(744)

Για την R-K $4^{ης}$ τάξης: περιοχή απόλυτης ευστάθειας $S=\{z\in\mathbb{C}: |1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots+\frac{z^4}{4!}|\le 1\}$

B- ευσταθής

Μια μέθοδος RK είναι B-ευσταθής:
Έστω Π.Α.Τ.: $\begin{cases} y'=f(t,y), & t\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

1) Η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz: $(f(t,y)-f(t,z), y-z)\le 0$, $\forall t\in[a,b], y,z\in\mathbb{R}$.
2) το διακριτό ανάλογο με την μέθοδο RK δημιουργεί μία φθίνουσα ακολουθία: $\|y^{n+1}-z^{n+1}\|\le\|y^n-z^n\|$, τότε η RK είναι B-ευσταθής.
με $(\cdot,\cdot)$: ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.
$\|\cdot\|$: ευκλείδεια νόρμα.

Αλγεβρική Ευστάθεια

Ορισμός: Μια μέθοδος RK λέγεται αλγεβρικά ευσταθής αν:
i) $b_i\ge 0$, $i=1,2,\dots,q$
ii) Ο $q\times q$ πίνακας των στοιχείων m_{ij}, όπου $m_{ij}=b_ia_{ij}+b_ja_{ji}-b_ib_j$, $1\le i,j\le q$, είναι μη

αρνητικά ορισμένος $(Mx,x)\ge 0$ ή
$\sum_{i,j=1}^{q} m_{ij}x_j\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}^q$.

Πρόταση: Κάθε αλγεβρικά ευσταθής μέθοδος RK είναι B-ευσταθής.

Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. αν η RK δεν είναι αλγεβρικά ευσταθής, δεν συνεπάγεται ότι δεν είναι B-ευσταθής.

Παράδειγμα 1: Πεπλεγμένη Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}, \quad b_1 \geq 0.$$

$m_{11} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = 1 \geq 0.$

άρα η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής κ' συνεπώς είναι B-ευσταθής.

Παράδειγμα 2: Πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}, \quad b_1 \geq 0.$$

$m_{11} = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot 1 = 0 \geq 0.$

Άρα, είναι αλγεβρικά ευσταθής $\Rightarrow$ B-ευσταθής.

Παράδειγμα 3: Μέθοδος τραπεζίου

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

$b_i \geq 0, \; i=1,2.$

$m_{11} = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0 - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$m_{12} = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = 0$

$m_{21} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}0 - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = 0.$

(744)

$$m_{22} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Άρα, $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $(Mx, x) < 0$.

Άρα, η μέθοδος δεν είναι αλγεβρικά ευσταθής, συνεπώς δεν μπορώ να αποφανθώ για B-ευστάθεια. Όμως, αποδεικνύεται ότι δεν είναι B-ευσταθής (Άσκηση 3.48 βιβλίου).

744

Δευτέρα 9/01/2017

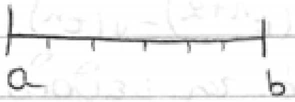
Μονοβηματικές μέθοδοι: άμεση Euler, πεπλεγμένη Euler, μέθοδος του τραπεζίου, μέθοδος του μέσου, μέθοδοι R-K.

4ο Κεφ. Πολυβηματικές Μέθοδοι

Έστω το Π.Α.Τ (1): $\begin{cases} y' = f(t, y), \ t \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Ζητάω να βρω μια συνάρτηση $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ που να επαληθεύει το Π.Α.Τ.
Επιπλέον, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

Θεωρούμε ομοιόμορφη διαμέριση με $h = \frac{b-a}{N}$
κ' $t^n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$



Παράδειγμα Διβηματικής Μεθόδου

$$\begin{cases} y^0, y^1, \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = 2hf(t^{n+1}, y^{n+1}) \end{cases}$$

1ος τρόπος:
Με τη βοήθεια των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών (Κ.Π.Δ.) έχουμε:
για το t^{n+1}: $y'(t^{n+1}) = \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$

$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y^{n+1}) \Rightarrow$

Εφαρμόζοντας τις Κ.Π.Δ. στη Δ.Ε. του (1) έχουμε: $\dfrac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} = f(t^{n+1}, y^{n+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) = 2h\, f(t^{n+1}, y^{n+1})$. άμεση διβηματική μέθοδος

2ος τρόπος:

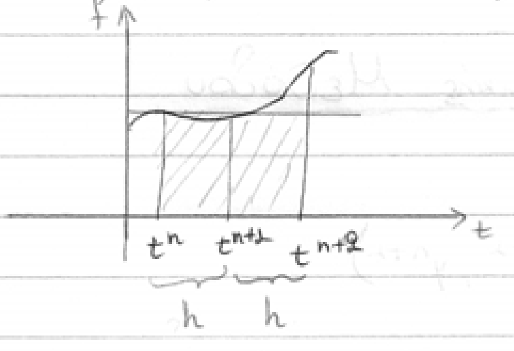
Με αριθμητική ολοκλήρωση της Δ.Ε. του (1) στο διάστημα $[t^n, t^{n+2}]$:

$$\int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(\tau)\,d\tau = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(\tau, y(\tau))\,d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(\tau, y(\tau))\,d\tau$$

$$\Rightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) \simeq 2hf(t^{n+1}, y^{n+1})$$

από τη μέθοδο του μέσου



Προσεγγίζουμε το ίδιο ολοκλήρωμα με τον κανόνα του Simpson

$$\int_c^d f(t)\,dt = \frac{d-c}{6}\left[f(c) + 4\left(\frac{d+c}{2}\right) + f(d)\right]$$

άρα (2): $\begin{cases} y_0, y_1, \text{δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}\left[f(t^n, y^n) + 4f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^{n+2}, y^{n+2})\right] \end{cases}$

(744)

[Εαν δεν δίνεται το y^1, μπορώ να το υπολογίσω με μία μονοβηματική μέθοδο (π.χ. άμεση Euler) κ' μετά για $n \geq 2$ να εφαρμόσω την πολυβηματική μέθοδο.]

Ο κανόνας του Simpson είναι διβηματική, πεπλεγμένη μέθοδος. Έχει μεγάλη περιοχή απόλυτης ευστάθειας αλλά απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος ενδεχομένως μη γραμμικού.

Γενικά, μία κ-βηματική μέθοδος περιγράφεται από $2k+2$ σταθερές: $a_0, a_1, \dots, a_k, b_0, b_1, \dots, b_k$ και είναι της μορφής:

$$(3)\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1}, \text{ κ δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = h\left[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)\right] \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $a_k \neq 0$ (συνήθως $a_k = 1$) κ' $|a_0| + |b_0| > 0$, για να έχουμε κ-βηματική μέθοδο.

1) Αν $b_k = 0$, η μέθοδος θα λέγεται άμεση, ο προσδιορισμός του y^{n+k} γίνεται εύκολα με αντικατάσταση των προηγούμενων όρων.

2) Αν $b_k \neq 0$, η μέθοδος θα λέγεται πεπλεγμένη κ' ο προσδιορισμός του y^{n+k} θα απαιτεί τη λύση ενός γενικά μη γραμμικού συστήματος.

Πλεονεκτήματα - Μειονεκτήματα

1) Οι πολυβηματικές μέθοδοι είναι λιγότερο δαπανηρές από τις R-K.
α) Στις άμεσες χρειαζόμαστε μόνο έναν συναρτησιακό υπολογισμό της f. (οι κ-1 συναρτησιακοί υπολογισμοί είναι ήδη αποθηκευμένοι στη μνήμη από τα προηγούμενα).
β) Στις πεπλεγμένες χρειάζεται να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα $m \times m$, ενώ για τις πεπλεγμένες R-K μεθόδους πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα της μορφής $Ay=b$, $A \in \mathbb{R}^{qm \times qm}$, q: ενδιάμεσα απαιτούμενα βήματα.

2) Υστερούν σε σχέση με τις R-K όσον αφορά τις ιδιότητες ευστάθειας.

Συστηματική κατασκευή πολυβηματικών μεθόδων

Έστω ένα πολυώνυμο $p_{n,\kappa}$, βαθμού το πολύ κ τ.ω. $p_{n,\kappa}(t^{n+i}) = y(t^{n+i})$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \kappa$.

Παρατήρηση: Το πολυώνυμο αυτό είναι το πολυώνυμο παρεμβολής (Lagrange) που παρεμβάλλεται στις τιμές $y(t^{n+i})$

Αν στη σχέση $y'(t^{n+\kappa}) = f(t^{n+\kappa}, y^{n+\kappa})$ προσεγγίσουμε την y' με την παράγωγο του πολυωνύμου $p'_{n,\kappa}$, τότε οδηγούμαστε στην εξής αριθμητική μέθοδο:

(744)

(4) $\begin{cases} y^0, y^1, \ldots, y^{\kappa-1}, \kappa \text{ δεδομένα} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+\kappa} = h f^{n+\kappa}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$

όπου $\nabla y^n = y^n - y^{n-1}$ (οπίσθιες διαφορές) κ' $\nabla^j = \nabla(\nabla^{j-1} y^n)$

Δηλ. για $j=2$: $\nabla^2 = \nabla(\nabla y^n) = \nabla(y^n - y^{n-1}) = \nabla y^n - \nabla y^{n-1} =$
$= y^n - y^{n-1} - (y^{n-1} - y^{n-2})$.

Η (4) είναι μία κ-βηματική μέθοδος, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συστήματα Δ.Ε. κ' λέγεται μέθοδος ανάδρομων διαφορών με κ-βήματα.

Παράδειγμα κ-βηματικής μεθόδου:
$\kappa = 1, \ a_1 = 1, \ a_0 = -1, \ b_1 = 1$
Από την (3) προκύπτει η μέθοδος:
$-1 y^n + 1 y^{n+1} = h \cdot 1 f(t^{n+1}, y^{n+1}) \Rightarrow$
$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$ πεπλεγμένη Euler.

Οι κ-βηματικές μέθοδοι της μορφής:

(5) $\begin{cases} y^0, y^1, \ldots, y^{\kappa-1}, \ \kappa\text{-δεδομένα} \\ y^{n+\kappa} - y^{n+\kappa-1} = h \displaystyle\sum_{j=0}^{k} b_j f^{n+j}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-\kappa \end{cases}$

(κ συναρτησιακοί υπολογισμοί)

λέγονται μέθοδοι Adams.

Οι άμεσες μέθοδοι Adams ονομάζονται: Adams-Bashforth. ($b_\kappa = 0$)

Παράδειγμα: $k=2$, $y^{n+2} - y^{n+1} = h\left(\frac{3}{2} f^{n+1} - \frac{1}{2} f^{n}\right)$
$\quad\uparrow_{b_k=0}$

Οι πεπλεγμένες μέθοδοι Adams ($b_k \neq 0$) ονομάζονται Adams-Moulton.

Παράδειγμα: $k=2$, $y^{n+2} - y^{n+1} = h\left(\overset{\neq 0}{\frac{5}{12}} f^{n+2} + \frac{2}{3} f^{n+1} - \frac{1}{12} f^{n}\right)$

Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων

Ορισμός: Μία k-βηματική μέθοδος που περιγράφεται από $2k+2$ σταθερές $a_0, a_1, \ldots, a_k$, $b_0, b_1, \ldots, b_k$ λέγεται ευσταθής, αν υπάρχει c, που εξαρτάται από την f αλλά είναι ανεξάρτητη από το N, άρα κ' από το h τ.ω. για τις ακολουθίες (y^n), (z^n):

$$\begin{cases} y^0, y^1, \ldots, y^{k-1} \\ a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \ldots + a_0 y^n = h\left(b_k \underbrace{f^{n+k}}_{= f(t^{n+k},\, y(t^{n+k}))} + b_{k-1} f^{n+k-1} + \ldots + b_0 f^n\right) \end{cases}$$

κ'

$n = 0, 1, \ldots, N-k$

$$\begin{cases} z^0, z^1, \ldots, z^{k-1} \\ a_k z^{n+k} + a_{k-1} z^{n+k-1} + \ldots + a_0 z^n = h\left(b_k f^{n+k} + \ldots + b_0 f^n\right) \end{cases}$$

Να ισχύει: $\max\limits_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C \max\limits_{0 \le j \le k} |y^j - z^j|$

Ορισμός: (Συνθήκες των ριζών)
Η πολυβηματική μέθοδος (3) πληροί την συνθήκη των ριζών, αν για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, p, που ορίζεται ως: $p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_0$

(744)

Ισχύει ότι:
$p(z)=0 \Rightarrow |z|<1$ (για τις απλές ρίζες)
$p(z)=p'(z)=0 \Rightarrow |z|<1$ (για τις ρίζες με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1.)
Δηλαδή, όλες οι ρίζες του p, να είναι μικρότερες κατά απόλυτη τιμή της μονάδας, εκείνες δε που έχουν απόλυτη τιμή 1 είναι απλές.

<u>Πρόταση</u>: Αν μία πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής, τότε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών. Αντίστροφα, αν ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών τότε η μέθοδος είναι ευσταθής (Butcher & Dahlquist)

<u>Συνέπεια κ' Ακρίβεια</u>

Για το Π.Α.Τ. (1) ορίζω την ποσότητα:
$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} \left[a_j\, y(t+jh) - h b_j\, y'(t+jh) \right]$$
Έχουμε:
$$\sum_{j=0}^{k} \Big[a_j \underbrace{y(t^{n+j})}_{\text{ακριβής λύση}} - h b_j \underbrace{y'(t^{n+j})}_{\text{παράγωγος ακριβούς λύσης}} \Big] \simeq \sum_{j=0}^{k} \Big[a_j \underbrace{y(t+jh)}_{\text{προσεγγιστική λύση}} - h b_j \underbrace{y'(t+jh)}_{\text{παράγωγος προσεγγιστικής λύσης}} \Big]$$

Άρα, η $(L_h y)$ μου δίνει το <u>μέτρο αποτυχίας</u> της ακριβούς λύσης που ικανοποιεί την (3) στο σημείο t.

Άρα, το $(L_h y)(t)$ είναι ανάλογο με το τοπικό σφάλμα που έχουμε ορίσει στις R-K κ' γενικότερα στις μονοβηματικές μεθόδους, $\delta^n = y(t^{n+1}) - y^{n+1}$, στο σημείο t^{n+1}.

<u>Ορισμός</u>: (τάξη ακρίβειας πολυβηματικής μεθόδου): Έστω $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, ομαλή συνάρτηση. Αν p, είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι: $\exists\, c = c(y) : \forall t \in [a, b-kh]$: $|(L_h y)(t)| \le c h^{p+1}$, τότε λέμε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι p (η τάξη ακρίβειας ισούται με τη δύναμη του h ελαττούμενη κατά μία μονάδα).

(Μπορεί ο ορισμός να γενικευθεί για σύστημα Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης).

Αν η τάξη ακρίβειας μιας μεθόδου είναι τουλάχιστον 1, η μέθοδος λέγεται συνεπής.

Η μέθοδος R-K είναι συνεπής $(p \ge 1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i = 1$
(σημαντικό)

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $y(t+jh)$ κ' $y'(t+jh)$ ως προς t κ' κάνοντας πράξεις καταλήγω στη σειρά
$(L_h y)(t) = c_0 y(t) + c_1 y'(t) + c_2 y''(t) + \dots$,
όπου c_j: σταθερές, $j = 0, 1, 2, \dots$ ανεξάρτητες των y, t κ' h, εξαρτώνται μόνο από τη συγκεκριμένη πολυβηματική μέθοδο. Η πολυβηματική μέθοδος είναι τάξης ακρίβειας p

ακριβώς αν $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_p$, $c_{p+1} \neq 0$.

με $c_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k$

$c_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ka_k - (b_0 + b_1 + \ldots + b_k)$

γενικά για $j \geq 2$, $c_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + 3^j a_3 + \ldots + k^j a_k)$

$- \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \ldots + k^{j-1} b_k)$

<u>Λήμμα</u>: Ικανή κ' αναγκαία συνθήκη για τα συνέπεια της μεθόδου ($p \geq 1$) είναι να ισχύουν οι σχέσεις: (*) $\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 0 \\ a_1 + 2a_2 + \ldots + ka_k - (b_0 + b_1 + \ldots + b_k) = 0 \end{cases}$

<u>Άσκηση για το σπίτι</u>: Υπολογίστε τις c_j για την πολυβηματική μέθοδο: $\begin{cases} y_0, y_1, \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = 2hf^{n+1}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$

$(a_0 = -1,\; a_1 = 0,\; a_2 = 1,\; b_1 = 2,\; b_0 = b_2 = 0)$

Τι τάξη ακρίβειας είναι; $(p = ?)$